

dr inż. Tomasz Janiak\*

dr inż. Aleksandra Niespodziana\*

dr inż. Adam Grabowski\*

# Analiza sztywności zginanych przekrojów żelbetowych z wykorzystaniem nieliniowych zależności konstytutywnych – przykłady obliczeniowe

*Stiffness analysis of bent reinforced concrete cross-sections, based on nonlinear constitutive dependencies – calculation examples*

**Streszczenie.** Bazując na autorskim algorytmie numerycznym (prezentowany w grudniowym numerze miesięcznika), przeprowadzono analizę sztywności zginanych przekrojów żelbetowych. Badano wpływ takich czynników, jak: stopień zbrojenia, klasa wytrzymałości betonu, obecność zbrojenia ściskanego, przyjęta zależność konstytutywna  $\sigma_c - \varepsilon_c$ . Wyniki obliczeń przedstawiono w formie wykresów z komentarzem wyjaśniającym.

**Słowa kluczowe:** analiza nieliniowa, sztywność przekroju, żelbet.

W grudniowym numerze miesięcznika „Materiały Budowlane” 12/2013 ukazał się artykuł prezentujący pierwszą część badań dotyczących analizy sztywności zginanych przekrojów żelbetowych. Przedstawiono w nim podstawy teoretyczne zagadnienia oraz szczegółowo omówiono zasadę działania numerycznego algorytmu określania funkcji sztywności belek żelbetowych. Algorytm umożliwia uwzględnianie dowolnych nieliniowych zależności konstytutywnych odnoszących się do betonu i stali zbrojeniowej. Został on zaimplementowany w autorskim programie komputerowym. W tym artykule, stanowiącym kontynuację opublikowanego w numerze 12/2013, przedstawiono wyniki wybranych analiz numerycznych, w których wykorzystano związki konstytutywne określone w normie PN-EN 1992-1-1:2008 Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.

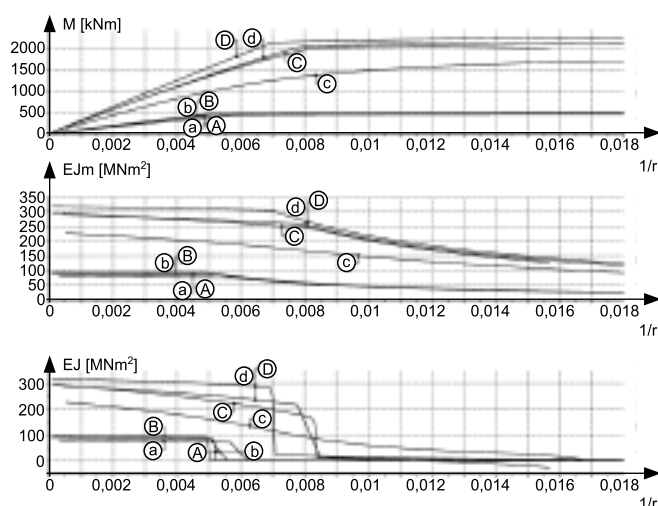
Opracowany algorytm obliczania nieliniowej sztywności przekrojów żelbetowych oraz jego implementacja komputerowa mają służyć obliczaniu tablic zależności moment  $M$  – krzywizna  $1/r$ . Tablice te, czy inaczej – funkcje określone w sposób dyskretny, będą docelowo wykorzystane w opracowywanym programie do nieliniowej analizy statycznej belek żelbetowych. Analiza sztywności w zależności od przyjętych parametrów może prowadzić do interesujących wniosków i spostrzeżeń.

## Analiza sztywności w zależności od funkcji konstytutywnych dla betonu

W celu oceny wpływu przyjętej zależności naprężenie – odkształcenie ( $\sigma_c - \varepsilon_c$ ) na sztywność giętą przekrojów wykonano osiem serii obliczeń, których wyniki przedstawiono na rysunku 1. Na wszystkich wykresach (rysunki 1 – 3)

**Abstract.** On the basis of the authorial numerical algorithm (presented in December 2013 issue of „Materiały Budowlane”) the stiffness analysis of bent reinforced concrete cross-sections has been carried out. The influence of the following factors have been examined: reinforcement ratio, compressive strength classes, presence of compressive reinforcement, stress – strain relationship. The results have been presented in graphical form with explanations.

**Keywords:** non-linear analysis, stiffness of cross-section, reinforced concrete.



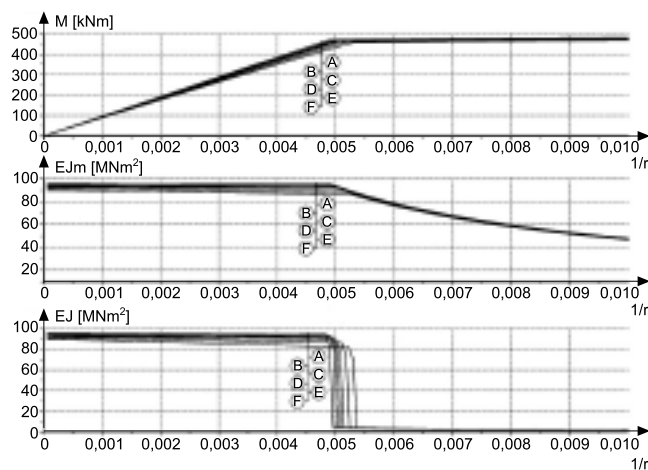
Rys. 1. Analiza sztywności dla różnych zależności  $\sigma_c - \varepsilon_c$

na osi poziomej odłożona jest krzywizna ( $1/r$ ), na osiach pionowych mamy odpowiednio moment zginający –  $M$ , sieczną sztywność giętą –  $EJ_m$ , styczną sztywność giętą –  $EJ$  (ich definicje można znaleźć w części pierwszej artykułu opublikowanego w miesięczniku „Materiały Budowlane” 12/2013). Każdej serii obliczeń wykonanych dla określonych danych i przy założeniu zależności  $\sigma_c - \varepsilon_c$  właściwej dla analizy nieliniowej (na wykresie odpowiadają im linie oznaczone wielkimi literami) odpowiada seria dla tych samych danych, przy zależności  $\sigma_c - \varepsilon_c$  jak do projektowania przekrojów (linie oznaczone małymi literami). Wspólne dane w każdej serii obliczeń, to: wymiary przekroju  $b \times h = 100 \times 50$  cm; zbrojenie wyłącznie dołem ( $A_{s2} = 0$ ) stałą A-III, o środku ciężkości określonym odległością  $a_1 = 4$  cm. Dane różne dla poszczególnych serii, to:

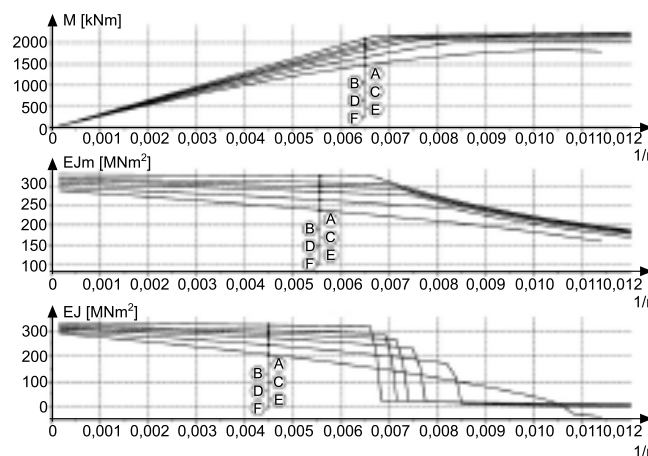
\* Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska

- serie **A** i **a**: beton C25/30, zbrojenie 10 #20 o  $A_{s1} = 31,4 \text{ cm}^2$ , co odpowiada stopniowi zbrojenia 0,68%;
- serie **B** i **b**: beton C55/67, zbrojenie 10 #20 o  $A_{s1} = 31,4 \text{ cm}^2$ ;
- serie **C** i **c**: beton C25/30, zbrojenie 50 #20 o  $A_{s1} = 157,0 \text{ cm}^2$ , co odpowiada stopniowi zbrojenia 3,41%;
- serie **D** i **d**: beton C55/67, zbrojenie 50 #20 o  $A_{s1} = 157,0 \text{ cm}^2$ .

W przypadku belek o stosunkowo małym stopniu zbrojenia (linie **A**, **a**, **B** i **b**) zauważyć można niewielkie różnice wyników zarówno przy odmiennych zależnościach  $\sigma_c - \varepsilon_c$  (porównanie linii **A** z **a** i **B** z **b**), jak i przy różnych klasach betonu (porównanie linii **A** z **B** i **a** z **b**). W przypadku belek silnie zbrojonych (linie **C**, **c**, **D** i **d**) widoczne jest, że wpływ przyjętej zależności naprężenie – odkształcenie na sztywność jest duży. Największe różnice zauważyć można dla belki z betonu C25/30 (linie **C** i **c**). Charakterystyczne jest również to, że dla linii **c** na wykresie sztywności stycznej nie pojawia się strefa gwałtownego spadku sztywności. Spadek ten związany jest z zachowaniem się stali zbrojeniowej, dla której zależność  $\sigma_c - \varepsilon_c$  jest bilinearna. Strefa spadku odpowiada przechodzeniu wykresu  $\sigma_c - \varepsilon_c$  z części rosnącej w stałą, co oznacza początek plastycznego płynięcia stali. Wynika z tego, że parametry przyjęte dla linii **c** spowodowały sytuację uplastyczn-



Rys. 2. Analiza sztywności dla różnych klas wytrzymałości betonu przy stopniu zbrojenia 0,68%



Rys. 3. Analiza sztywności dla różnych klas wytrzymałości betonu przy stopniu zbrojenia 3,41%

niania się betonu przy jednoczesnej liniowo-sprężystej pracy stali (zbrojenie nie zaczęło się uplastyczniać).

Z przeprowadzonego porównania wynika, że przy małym stopniu zbrojenia różnice przy stosowaniu odmiennych zależności  $\sigma_c - \varepsilon_c$  są na tyle małe, że mogą być pomijane w obliczeniach statycznych. Oznacza to, że w analizie statycznej możliwe jest stosowanie związków naprężenie – odkształcenie właściwych do wymiarowania przekrojów, przy czym nie określono granic dopuszczalności takiego postępowania. W przypadku belek silnie zbrojonych wybór zależności  $\sigma_c - \varepsilon_c$  ma duży wpływ na funkcje sztywności giętej.

## Wpływ klasy wytrzymałości betonu na funkcje sztywności belek

Przyjęcie bilinearnej zależności naprężenie – odkształcenie dla stali zbrojeniowej oraz to, że jej moduł sprężystości jest taki sam dla różnych gatunków stali, powoduje, że w praktyce gatunek stali nie wpływa na funkcje sztywności belek. Potwierdza to również fakt, że w przypadku różnych gatunków stali można tak dobrać pola powierzchni ich przekrojów, aby uzyskać identyczne wykresy  $F_s - \varepsilon$ . Sprawa przedstawia się inaczej w odniesieniu do klasy betonu, która ma wpływ na kształt wykresu  $\sigma_c - \varepsilon_c$ . W celu scharakteryzowania zależności pomiędzy funkcjami sztywności a klasą betonu wykonano dwanaście serii obliczeń. Podstawowe dane w tym przykładzie, to: wymiary przekroju  $b \times h = 100 \times 50 \text{ cm}$ ; zbrojenie wyłącznie dołem ( $A_{s2} = 0$ ) stalą A-III, o środku ciężkości określonym odległością  $a_1 = 4 \text{ cm}$ . W pierwszych sześciu seriach (rysunek 2) przyjęto zbrojenie w postaci 10 prętów #20, co daje stopień zbrojenia równy 0,68%. Kolejne serie odnoszą się do zbrojenia 50 #20, odpowiadającego stopniowi zbrojenia 3,41% (rysunek 3). W obu przypadkach przyjmowano kolejno beton: C16/20 (linia F), C25/30 (linia E), C35/45 (linia D), C45/55 (linia C), C55/67 (linia B) i C80/95 (linia A).

Pierwszy wniosek wynikający z analizy rysunków 2 i 3 jest oczywisty: zwiększenie ilości zbrojenia powoduje istotny wzrost sztywności belki, niezależnie od klasy wytrzymałości użytego betonu. W belce o niewielkim zbrojeniu, sztywność na początku wykresu wynosi ok. 97 MNm<sup>2</sup>, a w belce silnie zbrojonej – ok. 320 MNm<sup>2</sup>, co oznacza 3,3-krotny wzrost, przy czym odpowiadający temu wzrost ilości zbrojenia jest 5-krotny. Wskazuje to, że dozbieranie przekrojów betonowych jest dość skuteczną metodą ograniczania ugięć belek żelbetonowych. Warto przy tej okazji wspomnieć, że sztywność gięta pełnego przekroju betonowego klasy C25/30 (niezarysowanego, bez zbrojenia) wynosi 323 MNm<sup>2</sup>.

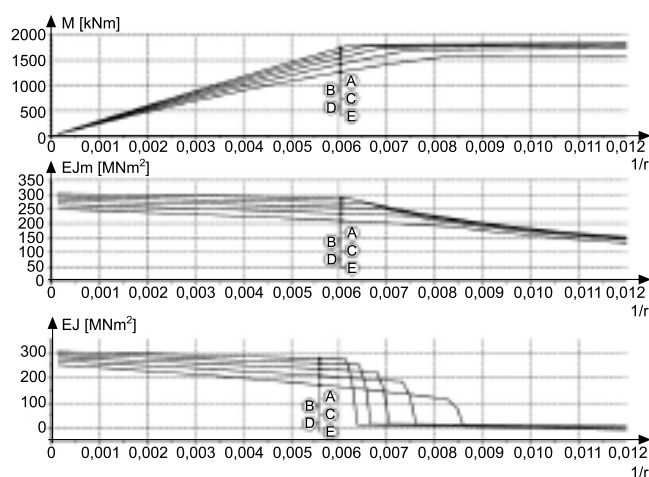
Analiza wykresów sztywności przedstawionych na rysunkach 2 i 3 może wskazywać, że wzrost sztywności związany z podnoszeniem klasy wytrzymałości betonu jest niewielki. W przypadku belki silnie zbrojonej, odnosząc się do początków wykresów, wynosi on ok. 15% pomiędzy wynikami dla betonów C16/20 i C80/95. Trzeba jednak uzmysłowić sobie, że względny przyrost wartości modułu sztywności tych betonów wynosi ok. 45%. Oznacza to, że skuteczność zwiększania sztywności belek przez zwiększanie wartości współczynnika sprężystości (związanego z klasą wytrzymałości betonu) jest większa niż w przypadku zwiększania pola powierzchni zbrojenia rozciąganego. Należy podkreślić,

że wpływ klasy wytrzymałości betonu na kształt funkcji sztywności jest tym większy, im wyższy jest stopień zbrojenia belki.

### Wpływ ilości zbrojenia ściskanego na funkcję sztywności belek

Ostatnia z analiz dotyczy związku między ilością zbrojenia w strefie ściskanej a funkcją sztywności belki. Wykonano wiele obliczeń dla różnych klas wytrzymałości betonu, stopnia zbrojenia rozciąganego i ilości zbrojenia ściskanego. Okazało się, że zbrojenie ściskane tym silniej modyfikuje funkcję sztywności, im większy jest stopień zbrojenia rozciąganego i im niższa klasa wytrzymałości betonu. Jest to uzasadnione, gdyż w przypadku dużej ilości zbrojenia dolnego i niskiej klasy betonu (a tym samym niskiego współczynnika sprężystości), beton będzie doznawał dużych odkształceń, a jednocześnie zbrojenie rozciągane – odkształceń niewielkich. Moduł sprężystości stali jest kilkakrotnie większy od modułu betonu, przy czym ta dysproporcja jest większa w przypadku niższych klas betonu. W związku z tym wprowadzenie prętów zbrojenia do strefy ściskanej przekroju powoduje, że zbrojenie to przejmuje dużą część naprężeń ściskających i zmniejsza odkształcenia w tej strefie. Z kolei ograniczenie odkształceń jest równoznaczne ze zwiększeniem sztywności belki.

Na rysunku 4 przedstawiono funkcje sztywności uzyskane w jednej z przeprowadzonych serii obliczeń. Przyjęto przy tym następujące dane: wymiary przekroju  $b \times h = 100 \times 50$  cm; beton C16/20; zbrojenie dołem w postaci 40 prętów #20 (co daje  $A_{s1} = 125,6 \text{ cm}^2$  i stopień zbrojenia równy 2,73%) ze stali A-III, o środku ciężkości danym odległością  $a_1 = 4$  cm. Odległość  $a_2$ , określająca położenie zbrojenia górnego, jest równa 4 cm. Kolejne wykresy odpowiadają różnym ilościom zbrojenia ściskanego, które wynosiły:  $A_{s2} = 0$  (linia E);  $A_{s2} = 0,25A_{s1}$  (linia D);  $A_{s2} = 0,5A_{s1}$  (linia C);  $A_{s2} = 0,75A_{s1}$  (linia B);  $A_{s2} = A_{s1}$  (linia A).



Rys. 4. Analiza sztywności w zależności od ilości zbrojenia w strefie ściskanej

Kształt wykresów potwierdza wcześniej omówioną zależność: zbrojenie ściskane zwiększa sztywność giętą belek żelbetowych. Można również zaobserwować, że dokładanie każdej następnej ilości zbrojenia ściskanego (kolejne wykresy odpowiadają przyrostom o  $0,25A_{s1}$ ) powoduje coraz

mniej przyrost sztywności. Poza tym, wraz ze zwiększaniem ilości zbrojenia ściskanego wykresy  $M - (1/r)$  nabierają kształtu zbliżonego do bilinearnego. Spowodowane jest to zwiększonym udziałem stali zbrojeniowej (rozciąganej i ściskanej) w przenoszeniu naprężeń (zależność  $\sigma - \varepsilon$  dla stali jest bilinearna).

### Podsumowanie

Opracowano i zaimplementowano w autorskim programie numeryczny algorytm obliczania funkcji sztywności giętej belek żelbetowych. Istotnymi cechami tego algorytmu są:

- możliwość uwzględniania dowolnych zależności konstytutywnych dla betonu i stali zbrojeniowej (w pracy przyjęto zależności określone w EC2);
- uniwersalność umożliwiającą analizę belek pojedynczo lub podwójnie zbrojonych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego;
- możliwość analizy bardziej zaawansowanych modeli pracy belek żelbetowych, np. uwzględniających pracę betonu w strefie rozciąganej przed i po zarysowaniu (uwzględnienie współpracy betonu zarysowanego ze zbrojeniem rozciągającym nie podnosi wytrzymałości, ale zwiększa sztywność belek, co może wpływać na ograniczenie ugięć).

Bazując na opracowanym algorytmie, wykonano wiele serii obliczeń. Wykazano istotny wpływ na funkcję sztywności belki zginanej takich czynników, jak: stopień zbrojenia, klasa wytrzymałości betonu, obecność zbrojenia ściskanego, przyjęta zależność  $\sigma_c - \varepsilon_c$ . Badania numeryczne, z uwagi na dyskretne rozwiązania, pozwoliły autorom na przeprowadzenie wyłącznie analizy ilościowej. Niemniej zaobserwowano wiele interesujących prawidłowości, m.in.:

- wpływ klasy wytrzymałości betonu na sztywność belki zginanej jest tym większy, im większy jest jej stopień zbrojenia;
- w opracowanym algorytmie podstawą do obliczenia sztywności giętej belek żelbetowych była zależność moment – krzywizna:  $M - (1/r)$ ; w przypadku belek słabo zbrojonych nabiera ona cech zależności  $\sigma - \varepsilon$  stali zbrojeniowej (jej wykres upodabnia się do bilinearnego), a w przypadku belek silnie zbrojonych staje się zakrzywna;
- wprowadzanie zbrojenia do strefy ściskanej zwiększa sztywność belki (co jest oczywiste) i powoduje upodabnianie się zależności  $M - (1/r)$  do bilinearnej.

Uzyskane wykresy wskazują wyraźnie na ścisłą zależność sztywności belek od krzywizny w procesie zginania. Teoria liniowa, stosowana powszechnie w obliczeniach inżynierskich, uwzględnia stałość cech dla materiału i elementów konstrukcyjnych niezależnie od ich odkształceń. Wprowadzenie innych zależności  $\sigma_c - \varepsilon_c$  w fazie statycznej analizy nieliniowej i wymiarowania (jak np. w EC2) jest niespójne. Dobrym rozwiązaniem w projektowaniu konstrukcji żelbetowych byłoby stosowanie algorytmu, który jednocześnie umożliwia analizę statyczną w zakresie nieliniowym oraz wymiarowanie odpowiadające tej analizie.

Uzyskane wyniki wskazują, że odmienne zależności  $\sigma_c - \varepsilon_c$  powodują niewielkie różnice sztywności belek o niewielkim zbrojeniu, co daje duże szanse na ujednoczenie tych sztywności. W przypadku belek silnie zbrojonych różnice te są znaczne.