

dr inż. Michał Musiał¹⁾

Bezpośrednia metoda uproszczona sprawdzania ugięć belek o przekroju prostokątnym oraz płyt żelbetowych

Direct simplified method of calculating of reinforced concrete rectangular beams and plates deflections

DOI: 10.15199/33.2015.10.18

(Artykuł przeglądowy)

Streszczenie. W artykule zaprezentowano uproszczoną metodę obliczania ugięć prostokątnych belek i płyt żelbetowych. Algorytm obliczeń zaczerpnięty został z Eurokodu 2. Uproszczono go, wprowadzając współczynniki zależne od stopnia zbrojenia i/lub wymiarów przekroju poprzecznego. Proponowane podejście pozwala obliczać ugięcia elementów żelbetowych na podstawie charakterystyk przekroju betonowego bez uwzględnienia zbrojenia i zarysowania.

Słowa kluczowe: belka, płyta, ugięcie, żelbet.

Abstract. In the paper a simplified method of calculating of reinforced concrete rectangular beams and plates deflections is presented. Calculating algorithm was assumed according to Eurocode 2. It was simplified with introducing coefficients depending on reinforcement ratio and/or cross-section dimensions. Proposed attitude enabling calculating of reinforced concrete elements deflections on the basis of concrete cross-section characteristic without considering the reinforcement and cracking.

Keywords: beam, plate, deflection, reinforced concrete.

Obecnie w praktyce projektowej z dużym entuzjazmem wykorzystywane są programy wspomagające projektowanie. Współczesny inżynier – projektant ma do dyspozycji całą gamę programów ułatwiających obliczenia statyczno-wytrzymałościowe, kreślenie lub nawet obie te funkcje. Mogłoby się więc wydawać, że nie ma już miejsca w projektowaniu na anachroniczne tablice, nomogramy oraz metody uproszczone. Moim zdaniem teza ta jest niesłuszna. Nie każdy projektant dysponuje bowiem oprogramowaniem, które w krótkim czasie przeanalizuje skomplikowane przypadki. Ponadto zawsze istnieje potrzeba chociażby pobieżnej weryfikacji rozwiązań numerycznych. W związku z tym w artykule zaprezentuję **uproszczoną metodę bezpośredniego sprawdzania ugięć belek i płyt żelbetowych** pracujących w fazie zarysowanej, będącą alternatywą dla metod: bezpośredniej (porównania ugięcia elementu z wartością dopuszczalną) oraz pośredniej (porównania smukłości l_{eff}/d elementu z wartością graniczną), proponowanych w [1]. Jest ona zdecydowanie mniej czasochłonna niż metoda bezpośrednia oraz nie wprowadza tak dużych rezerw bezpieczeństwa jak metoda pośrednia.

Założenia

Punktem wyjścia do analiz była zależność pozwalająca obliczyć ugięcie wg [1]:

$$a = \zeta a_{II} + (1 - \zeta) a_I \quad (1)$$

gdzie:

a – ugięcie; ζ – współczynnik dystrybucji uwzględniający współpracę betonu i stali między rysami; a_{II} – ugięcie w przypadku pełnego zarysowania; a_I – ugięcie w przypadku braku rys.

Przy opracowywaniu metody uproszczonej należy oczywiście poczynić pewne założenia. Obliczanie ugięć elementów żelbetowych wymaga uwzględnienia interakcji dwóch materiałów: betonu i stali. Określenie charakterystyk przekroju sprowadzonego wymaga zastosowania współczynnika będącego stosunkiem modułów Younga (w tym przypadku betonu i stali). Do analiz przyjęto efektywny moduł Younga betonu $E_{c,eff}$ uwzględniający wpływ obciążeń długotrwałych, które zwykle są najbardziej interesujące z inżynierskiego punktu widzenia. Zgodnie z normami [1, 2] uwzględnienie efektów długotrwałych polega na redukcji średniej wartości modułu Younga E_{cm} do wartości efektywnej $E_{c,eff}$. Współczynnikiem redukcji jest wyrażenie $1 + \varphi(\infty, t_0)$, uwzględniające pełzanie przez współczynnik $\varphi(\infty, t_0)$. W typowych przypadkach ma on wartość 2,0. Po uwzględnieniu wymienionych założeń stosunek modułów Younga stali zbrojeniowej i betonów zwykłych

można szacować na poziomie 18,0. Taką też wartością posłużono się przy obliczaniu charakterystyk przekroju żelbetowego.

Ugięcia belek o przekroju prostokątnym

W ramach przeprowadzonych analiz przetestowano elementy belkowe z otuliną nominalną 25 mm. Odległość środka ciężkości zbrojenia rozciąganego od krawędzi rozciąganej wynosiła 43 mm, proporcje wymiarów boków b/h $0,3 \div 1,0$. Nie uwzględniono wpływu zbrojenia ściskanego. Te założenia wyczerpują większość praktycznych przypadków inżynierskich. Zgodnie z założeniami, w przypadku prostokątnych zarysowanych belek żelbetowych ugięcie długotrwałe proponuje się obliczać wg zależności:

$$a = \alpha_k \cdot \frac{M_{E_{eq}} \cdot l_{eff}^2}{E_{c,eff} \cdot I_c} \cdot \delta_1 \cdot \left[1 - \delta_2 \cdot \left(\frac{f_{ctm} \cdot I_c}{M_{E_{eq}} \cdot h} \right)^2 \right] \quad (2)$$

gdzie:

a – ugięcie; α_k – współczynnik zależny od schematu statycznego (np. wg [3]); $M_{E_{eq}}$ – moment zginający wywołany prawie stałą kombinacją obciążeń; l_{eff} – rozpiętość teoretyczna analizowanego przęsła; I_c – moment bezwładności „brutto” przekroju betonowego (bez uwzględnienia zarysowania oraz zbrojenia); f_{ctm} – średnia wytrzymałość betonu na rozciąganie; δ_1, δ_2 – współczynniki wg tabeli 1.

Współczynniki δ_1, δ_2 zależą od stopnia zbrojenia elementu. Najogólniej można stwierdzić, że są współczynnikami

¹⁾ Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego; e-mail: michal.musial@pwr.edu.pl

Tabela 1. Współczynniki do obliczania ugięcia belek
Table 1. Coefficients for calculating beams deflections

ρ [%]	δ_1 [-]	δ_2 [-]
0,2	4,2493	1,5560
0,3	3,0559	1,4009
0,4	2,4412	1,2711
0,5	2,0632	1,1603
0,6	1,8060	1,0646
0,7	1,6188	0,9811
0,8	1,4762	0,9076
0,9	1,3635	0,8425
1,0	1,2722	0,7845
1,1	1,1966	0,7325
1,2	1,1328	0,6858
1,3	1,0782	0,6435
1,4	1,0310	0,6051
1,5	0,9896	0,5702
1,6	0,9531	0,5383
1,7	0,9206	0,5091
1,8	0,8915	0,4822

przejścia między momentem bezwładności przekroju betonowego brutto I_c , momentem bezwładności z uwzględnieniem zbrojenia w fazie bez rys I_1 oraz pełnego zarysowania I_{II} . Obliczono je wg zależności:

$$\delta_1 = I_c / I_{II} \quad (3)$$

$$\delta_2 = 2 \cdot \left(1 - \frac{I_{II}}{I_1} \right) \quad (4)$$

Ugięcie płyt

Artykuł dotyczy obliczania ugięć płyt w przypadku, kiedy rozpatrywany jest wycinek o szerokości 1,0 m. W analizach ograniczono się do wysokości płyt 10 – 30 cm. Przyjęto bezpieczne założenie, że odległość środka ciężkości zbrojenia rozciąganego do krawędzi rozciąganej wynosi 30 mm. W przypadku płyt ugięcie można obliczać z wykorzystaniem następującej zależności:

$$a = \alpha_k \cdot \frac{M_{E_{ap}} \cdot I_{c,eff}^2}{E_{c,eff} \cdot I_c} \cdot \delta_3 \cdot \left[\delta_4 - 2 \cdot (\delta_4 - 1) \cdot \left(\frac{f_{ctm} \cdot I_c}{M_{E_{ap}} \cdot h} \right)^2 \right] \quad (5)$$

Oznaczenia zastosowane we wzorze (5) są podobne jak w (2). Przy czym momenty zginające oraz momenty bezwładności dotyczą pasma płyty o szerokości 1,0 m. Współczynniki δ_3 oraz δ_4 podano w tabeli 2. Podobnie jak w przypadku belek są one współczynnikami przejścia między odpowiednimi momentami bezwładności. Współczynnik δ_3 zależy przede wszystkim od stopnia zbrojenia, natomiast δ_4 od stopnia zbrojenia oraz wysokości całkowitej płyty. Współczynniki δ_3 i δ_4 można obliczyć z zależności:

$$\delta_3 = I_c / I_1 \quad (6) \quad \delta_4 = I_1 / I_{II} \quad (7)$$

Tabela 2. Współczynniki do obliczania ugięcia płyt
Table 2. Coefficients for calculating plates deflections

ρ [%]	δ_3 [-]	δ_4 [-]					
		100 ^{*)}	120 ^{*)}	150 ^{*)}	200 ^{*)}	250 ^{*)}	300 ^{*)}
0,2	0,9651	9,6803	7,9320	6,6032	5,5768	5,0717	4,7728
0,3	0,9494	7,0008	5,7574	4,8155	4,0908	3,7353	3,5254
0,4	0,9348	5,6230	4,6405	3,8987	3,3301	3,0521	2,8883
0,5	0,9210	4,7776	3,9560	3,3378	2,8656	2,6355	2,5002
0,6	0,9082	4,2034	3,4918	2,9580	2,5518	2,3544	2,2386
0,7	0,8960	3,7867	3,1553	2,6833	2,3252	2,1518	2,0503
0,8	0,8846	3,4697	2,8998	2,4750	2,1539	1,9989	1,9083
0,9	0,8738	3,2202	2,6989	2,3116	2,0198	1,8793	1,7974
1,0	0,8636	3,0183	2,5367	2,1798	1,9119	1,7834	1,7085
1,1	0,8539	2,8515	2,4028	2,0714	1,8233	1,7047	1,6357
1,2	0,8447	2,7113	2,2905	1,9805	1,7493	1,6390	1,5750
1,3	0,8360	2,5916	2,1948	1,9033	1,6865	1,5834	1,5237
1,4	0,8276	2,4883	2,1123	1,8368	1,6327	1,5358	1,4798
1,5	0,8197	2,3982	2,0404	1,7791	1,5859	1,4946	1,4419
1,6	0,8121	2,2944	1,9744	1,7316	1,5444	1,4545	1,4019
1,7	0,8049	2,2049	1,9182	1,6936	1,5077	1,4180	1,3663
1,8	0,7980	2,1249	1,8756	1,6616	1,4744	1,3863	1,3356

^{*)} h [mm]

Tabela 3. Dane i wyniki przykładowych analiz
Table 3. Data and results of exemplary analysis

	Przykład 1	Przykład 2	Przykład 3
Przekrój poprzeczny			
Klasa betonu	C30/37	C35/45	C25/30
ρ [%]	0,59	1,49	1,17
α_k	1/12	5/48	1/10
$l_{c,eff}$ [m]	4,5	6,0	4,0
$M_{E_{ap}}$ [kNm]	120	250	40
Ugięcie wg (1) [mm]	11,5	15,4	11,9
Ugięcie wg (2)/(5) [mm]	12,0	15,1	13,4
Względna różnica [%]	3,9	1,7	12,0

Przykłady analiz i dyskusja wyników

W tabeli 3 zaprezentowano wyniki trzech przykładowych analiz. W przykładach 1 i 2 uzyskano dużą zgodność wyników z obu metod. Największą różnicę między metodą dokładną a proponowaną metodą uproszczoną można zaobserwować w przykładzie 3. Obliczone ugięcia płyty różnią się o 12,0%. Rozbieżność wynika z tego, że tabela 1 i 3 dotyczą stosunku modułów Younga betonu i stali wynoszącego 18,0, a w analizowanym przykładzie 3 wyniósł on 19,4.

Podsumowanie

Zaprezentowana metoda pozwala obliczać ugięcia belek o przekroju prostokątnym oraz płyt żelbetowych. Z uwagi na uproszczone podejście, znacznie redukujące czas obliczeń, wprowadza pewien błąd.

Moim zdaniem w skrajnych przypadkach nie powinien on przekraczać 15%. W przypadku metod przybliżonych, można uznać tę wartość za satysfakcjonującą. Należy ponadto zaznaczyć, że metody normowe bazują na stałej dla całego elementu tzw. globalnej sztywności zastępczej. W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele innych metod obliczeniowych [3, 4] w różny sposób uwzględniających zarysowanie oraz reologię.

Jak wykazano w pracy [3], różnice między ugięciami obliczonymi z wykorzystaniem różnych metod (np. metoda Swaina oraz wg normy ACI) mogą sięgać nawet 50%.

Literatura

- [1] PN-EN 1992-1-1:2008. Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków. PKN, Warszawa 2008.
- [2] PN-B-03264:2002. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie. PKN, Warszawa 2002.
- [3] Kamiński M., Szechiński M., Ubyś A., Teoretyczne i praktyczne podstawy obliczania ugięć elementów żelbetowych, Dolnośląskie Wydawnictwo Naukowe, Wrocław 1998.
- [4] Musiał M., Analiza statyczna belek żelbetowych metodą sztywnych elementów skończonych, Modelowanie Inżynierskie, tom 12, nr 43, 2012, s. 211 – 218.

Przyjęto do druku: 24.08.2015 r.