

Simplified assessment of LTB for steel beams according to PN-EN 1993-1-1

Uproszczona ocena zwichrzenia belek stalowych zgodnie z PN-EN 1993-1-1

DOI: 10.15199/33.2026.09.05

Abstract. The paper presents an evaluation of the simplified procedure for verifying the lateral torsional buckling of steel beams according to PN-EN 1993-1-1 in comparison with the rigorous method. The analyses showed that for short beams the method may give unsafe results, particularly under top-flange loading and for slender cross-sections (large h/b_f), whereas for beams of greater slenderness it is conservative. The procedure should therefore be applied with caution, mainly as an auxiliary tool and not as a substitute for lateral torsional buckling calculations.

Keywords: lateral torsional buckling; steel beams; simplified method; load-bearing capacity of the structure.

Streszczenie. W artykule zaprezentowano ocenę uproszczonej procedury sprawdzania zwichrzenia belek stalowych wg PN-EN 1993-1-1 w porównaniu z metodą dokładną. Analizy wykazały, że w przypadku krótkich belek metoda może dawać wyniki niebezpieczne, szczególnie przy obciążeniu górnej półki i przekrojach smukłych (duże h/b_f), a w przypadku belek o większej smukłości jest konserwatywna. Procedurę należy więc stosować ostrożnie, głównie jako narzędzie pomocnicze, a nie substytut obliczeń zwichrzenia.

Słowa kluczowe: zwichrzenie; belki stalowe; metoda uproszczona; nośność konstrukcji.

Lateral torsional buckling (LTB) is one of the fundamental issues in the assessment of the resistance of steel members in bending. It is a three-dimensional phenomenon in which lateral displacement and twisting of the cross-section occur simultaneously, and its intensity depends, among other things, on the distance between the points of lateral restraint, the support and restraint conditions at the ends, the distribution of bending moments along the member and the point of load application relative to the shear centre. Consequently, a reliable assessment of LTB is sensitive to the modelling assumptions and often governs the structural solution (spacing of restraints, choice of cross-section).

In the general approach adopted in Eurocode 3 [1], edition 1, the assessment is based on determining the elastic critical moment M_{cr} and then the slenderness λ_{LT} and the reduction factor χ_{LT} , which depends on the lateral torsional buckling curve. In design practice, M_{cr} is most often determined from analytical relationships in which the factors describing the bending moment distribution and the types of loading, as well as the support conditions at the member ends, appear explicitly; these have been compiled and standardised, among others, in document SN003a-PL-EU [2]. This method is regarded as the reference in engineering calculations, but in practical application it may be laborious and prone to discrepancies resulting from the choice of boundary

Zjawisko zwichrzenia (*Lateral Torsional Buckling* – LTB) stanowi jedno z podstawowych zagadnień oceny nośności stalowych elementów zginanych. Jest to zjawisko przestrzenne, w którym występują jednocześnie przemieszczenia boczne i skręcanie przekroju, a jego intensywność zależy m.in. od odległości między punktami podparcia bocznego, warunków podparcia i skrępowania na końcach, rozkładu momentów zginających na długości elementu oraz miejsca przyłożenia obciążenia względem środka ścinania. W konsekwencji rzetelna ocena LTB jest wrażliwa na założenia modelowe i często determinuje rozwiązania konstrukcyjne (rozstaw stężeń, dobór przekroju).

W podejściu ogólnym przyjętym w Eurokodzie 3 [1] edycja 1. podstawą oceny jest wyznaczenie sprężystego momentu krytycznego M_{cr} , a następnie określenie smukłości λ_{LT} i współczynnika redukcyjnego χ_{LT} zależnego od krzywej zwichrzeniowej. W praktyce projektowej M_{cr} wyznacza się najczęściej z zależności analitycznych, w których jawnie występują współczynniki opisujące rozkład momentów zginających i typy obciążenia oraz warunki podparcia na końcach elementu, co zestawiono i ustandaryzowano m.in. w opracowaniu SN003a-PL-EU [2]. Metoda ta jest uznawana za punkt odniesienia w obliczeniach inżynierskich, ale w praktycznym zastosowaniu może być pracochłonna i podatna na rozbieżności wynikające z doboru parametrów brzegowych oraz interpretacji schematu pracy belki w rzeczywistym ustroju. Coraz powszechniej do wyznaczania sprężystego momentu krytycznego zwichrzenia belek

¹⁾ Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego; dariusz.czepizak@pwr.edu.pl

parameters and from the interpretation of the working scheme of the beam in the actual structure. Increasingly, engineers use computer software, e.g. LTBeamN [3], to determine the elastic critical moment for lateral torsional buckling of beams. The problem of lateral torsional buckling of steel beams, the interpretation of the procedures contained in PN-EN 1993-1-1 and cases of members less susceptible to lateral torsional buckling have also been discussed in the Polish literature [4 ÷ 6].

Owing to the complexity of the analytical method of determining M_{cr} in typical beam members in which the compression flange is frequently restrained at discrete points (e.g. by purlins, side rails, roof bracing or sheeting elements), PN-EN 1993-1-1 [1] permits, in clause 6.3.2.4, a simplified procedure for classifying beams as „not susceptible to lateral torsional buckling”. This procedure is based on the concept of an „equivalent compression flange” and reduces the lateral torsional buckling problem to the verification of flexural buckling of an equivalent member between the points of restraint. It is a computationally fast and intuitive approach, intended for use in the case of beams in buildings with discrete restraints to the compression flange. It should be borne in mind, however, that this simplification describes the lateral torsional buckling problem only to a limited extent, which may lead to marked conservatism in comparison with an analysis based on M_{cr} according to [2].

The paper presents the theoretical background of the simplified procedure for assessing lateral torsional buckling according to PN-EN 1993-1-1 [1], a verification of whether its use is always safe, and an assessment of its accuracy in comparison with the reference approach consisting in determining M_{cr} and the lateral torsional buckling reduction factor χ_{LT} . Analyses were carried out for four cases of single-span beams:

- 1) a beam with a constant bending moment along the whole span (Figure 1);
- 2) a simply supported beam under a uniformly distributed load (Figure 2);
- 3) a beam pinned at one end and rigidly fixed at the other (a system approximately corresponding to the end beam in a multi-span system – Figure 3);
- 4) a beam rigidly fixed at both ends (a system approximately corresponding to an internal beam in a multi-span system – Figure 4).

The selection of these cases makes it possible to trace unambiguously the influence of the boundary conditions and of the bending moment distribution on the results of the simplified procedure, and to formulate practical conclusions concerning the scope of its application and its limitations.

inżynierowie używają oprogramowania komputerowego, np. LTBeamN [3]. Problematyka zwichrzenia belek stalowych, interpretacji procedur zawartych w PN-EN 1993-1-1 oraz przypadków elementów mniej wrażliwych na zwichrzenie była również omawiana w literaturze krajowej [4 ÷ 6].

Ze względu na złożoność analitycznej metody wyznaczania M_{cr} , w typowych elementach belkowych, gdzie pas ściskany jest często stężony punktowo (np. przez płatwie, rygle, stężenia połaciowe lub elementy poszycia), norma PN-EN 1993-1-1 [1] dopuszcza w pkt 6.3.2.4 uproszczoną procedurę kwalifikacji belek jako „zabezpieczonych przed zwichrzeniem”. Procedura ta opiera się na koncepcji „równoważnego pasa ściskanego” i sprowadza problem zwichrzenia do sprawdzenia wyboczenia giętnego elementu zastępczego pomiędzy punktami stężenia. Jest to podejście obliczeniowo szybkie i intuicyjne, przeznaczone do stosowania w przypadku belek w budynkach z dyskretnymi stężeniami pasa ściskanego. Trzeba mieć jednak świadomość, że uproszczenie to w ograniczony sposób opisuje zagadnienie zwichrzenia, co może prowadzić do wyraźnego konserwatywności w porównaniu z analizą bazującą na M_{cr} wg [2].

W artykule przedstawiono podstawy teoretyczne uproszczonej procedury oceny zwichrzenia wg normy PN-EN 1993-1-1 [1], weryfikację, czy jej stosowanie jest zawsze bezpieczne oraz ocenę dokładności w porównaniu z podejściem referencyjnym polegającym na wyznaczaniu M_{cr} oraz współczynnika zwichrzenia χ_{LT} . Przeprowadzono analizy czterech przypadków belek jednoprzęsłowych:

- 1) belka o stałym momencie zginającym na całej długości przęsła (rysunek 1);
- 2) belka swobodnie podparta, obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem (rysunek 2);
- 3) belka podparta przegubowo z jednej strony i sztywno zamocowana z drugiej (układ w przybliżeniu odpowiadający belce skrajnej w ustroju wieloprzęsłowym – rysunek 3);
- 4) belka sztywno zamocowana z obu stron (układ w przybliżeniu odpowiadający belce pośredniej w ustroju wieloprzęsłowym – rysunek 4).

Dobór tych przypadków umożliwia jednoznaczne prześledzenie wpływu warunków brzegowych i rozkładu momentów na wyniki procedury uproszczonej oraz sformułowanie praktycznych wniosków dotyczących zakresu jej stosowania i ograniczeń.

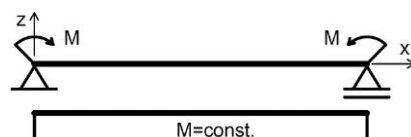


Fig. 1. Simply supported beam subjected to a uniform bending moment

Rys. 1. Belka swobodnie podparta obciążona stałym momentem zginającym

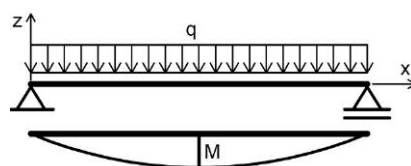


Fig. 2. Simply supported beam subjected to a uniformly distributed load

Rys. 2. Belka swobodnie podparta obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem

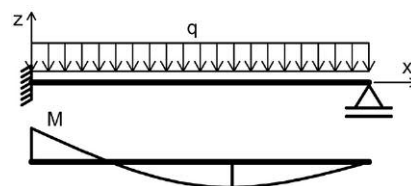


Fig. 3. Beam pinned at one end and rigidly fixed at the other

Rys. 3. Belka podparta przegubowo z jednej strony i sztywno zamocowana z drugiej

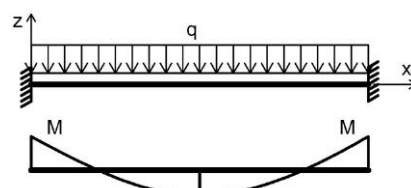


Fig. 4. Beam rigidly fixed at both ends

Rys. 4. Belka sztywno zamocowana z obu stron

Theoretical background of the simplified method for assessing lateral torsional buckling of beams (clause 6.3.2.4 of PN-EN 1993-1-1)

In accordance with the theory of thin-walled members with open cross-sections, the loss of stability of a member in bending is described by a system of coupled differential equations. Solving this system of equations yields the critical moment of elastic loss of stability of the member M_{cr} . For a beam with a bisymmetric open cross-section [2], the critical moment M_{cr} depends on: the member length L ; the flexural stiffness about the weak axis EI_z ; the uniform torsional stiffness GI_t ; the warping stiffness EI_w ; the end restraint conditions of the member; the bending moment distribution and the point of load application over the depth of the cross-section. The formulae for determining the critical moment M_{cr} [2] are usually complicated and discouraging for use in engineering practice. There is, however, a need for an accurate evaluation of the critical moment, and therefore various computer programs have been developed. A reliable piece of software is LTBeamN [3].

When a beam with a bisymmetric cross-section (Figure 5a) is bent about the major axis, one of its flanges is in compression and the other in tension. In such a situation the loss of stability of the beam is initiated by its compression zone. The compression flange, acting like a slender column, tends to buckle in the direction of the lowest stiffness (perpendicular to the plane of bending). The tension flange, in turn, behaves in a stable manner and, through the web, attempts to restrain the compression flange from displacing. Additional resistance is provided by the torsional stiffness of the whole section.

In response to the expectations of engineers, PN-EN 1993-1-1 [1] proposes in clause 6.3.2.4 a simplified procedure for assessing lateral torsional buckling of members. The essential idea of this method consists in reducing the three-dimensional lateral torsional buckling problem (out-of-plane displacement and twisting) to the one-dimensional problem of flexural buckling of a single compression member. Standard [1] states that members in bending, in which the compression flange is laterally restrained at discrete points by restraints spaced at L_c , are not susceptible to lateral torsional buckling if the following condition is satisfied:

Podstawy teoretyczne uproszczonej metody oceny zwichrzenia belek (pkt 6.3.2.4 PN-EN 1993-1-1)

Zgodnie z teorią prętów cienkościennych o przekrojach otwartych, utrata stateczności zginanego elementu jest opisana układem sprzężonych równań różniczkowych. W wyniku rozwiązania tego układu równań otrzymuje się moment krytyczny sprężystej utraty stateczności elementu M_{cr} . W przypadku belki o przekroju otwartym bisymetrycznym [2], moment krytyczny M_{cr} zależy od: długości elementu L ; sztywności giętej względem osi słabszej EI_z ; sztywności na skręcanie swobodne GI_t ; sztywności na skręcanie skrupowane EI_w ; warunków zamocowania na końcach pręta; rozkładu momentów zginających oraz miejsca przyłożenia obciążenia na wysokości przekroju. Formuły do wyznaczania momentu krytycznego M_{cr} [2] są zazwyczaj skomplikowane i zniechęcające do stosowania w praktyce inżynierskiej. Istnieje jednak potrzeba dokładnej oceny wartości momentu krytycznego, dlatego też opracowano różne programy komputerowe. Wia-rygodnym oprogramowaniem jest LTBeamN [3].

Kiedy belka o przekroju bisymetrycznym (rysunek 5a) ulega zginaniu względem osi silnej, jeden z jej pasów jest ściskany, a drugi rozciągany. W takiej sytuacji utrata stateczności belki inicjowana jest przez jej strefę ściskaną. Pas ściskany, działając niczym smukły słup, wykazuje tendencję do wybo- czenia w kierunku najmniejszej sztywności (w kierunku prostopadłym do płaszczyzny zginania). Pas rozciągany zachowuje się z kolei stabilnie i przez środek próbuje powstrzymać pas ściskany przed przemieszczeniem. Dodatkowy opór stawia sztywność skrętna całego profilu.

Wychodząc naprzeciw oczekiwaniom inżynierów, norma PN-EN 1993-1-1 [1] w pkt 6.3.2.4 proponuje uproszczoną procedurę oceny zwichrzenia elementów. Zasadnicza idea tej metody polega na redukcji trójwymiarowego problemu zwichrzenia (przemieszczenie z płaszczyzny zginania i skręcanie) do jednowymiarowego problemu wyboczenia giętego pojedynczego pręta ściskanego. Norma [1] stanowi, że elementy zginane, w których pas ściskany jest stabilizowany punktowo w kierunku bocznym stężeniami o rozstawie L_c , nie są narażone na zwichrzenie, jeśli spełniony jest warunek:

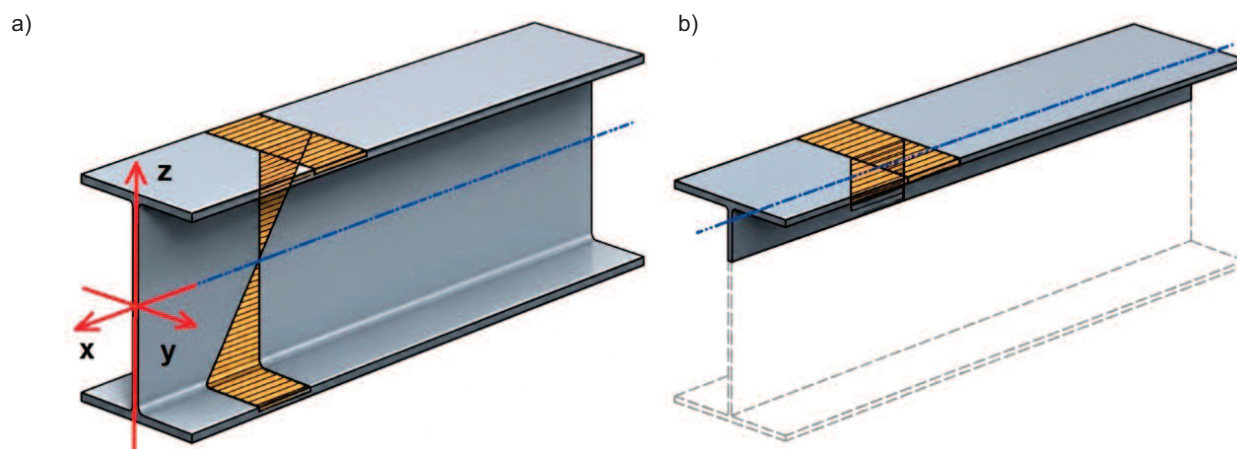


Fig. 5. Beam in bending; a) real member; b) equivalent compression member with a T-section

Rys. 5. Belka zginana: a) element rzeczywisty; b) zastępczy słup ściskany o przekroju teowym

$$\bar{\lambda}_f = \frac{k_c L_c}{i_{f,z} \lambda_1} \leq \bar{\lambda}_{c0} \frac{M_{c,Rd}}{M_{y,Ed}} \quad (1)$$

where the symbols are as in expression (6.59) of standard [1].

Where condition (1) is satisfied, this does not mean that the member is fully protected against lateral torsional buckling at any value of the bending moment $M_{y,Ed} \leq M_{c,Rd}$. Satisfaction of the condition means that the bending moment $M_{y,Ed}$ is small enough not to cause lateral torsional buckling of the member, i.e. the lateral torsional buckling resistance of the member will not be exceeded. At the same time, if condition (1) is not satisfied, the lateral torsional buckling resistance of the member should be verified according to the more complicated expression (6.60) [1], or this may be done according to more accurate procedures. Expression (1) was derived by reducing the problem of lateral torsional buckling of a beam in bending (Figure 5a) to the problem of buckling of an equivalent compression member subjected to a force varying along its length (Figure 5b) that depends on the bending moment distribution. The length of the equivalent compression member L_{eff} was taken as the product of the beam span L_c between the points restraining the compression flange and the correction factor k_c , which depends on the bending moment distribution in the beam over the analysed segment between restraints:

$$L_{eff} = k_c L_c \quad (2)$$

where:

k_c – correction factor allowing for the bending moment distribution in the beam over the analysed segment between restraints according to Table 6.6 [1];

L_c – distance between the restraints providing discrete lateral restraint to the compression flange.

The cross-section of the equivalent column (Figure 5b) is a T-section and consists of the compression flange of the beam and 1/3 of the compressed part of its web. In practice it is most often a rectangle of depth equal to 1/6 of the web depth h_w and width equal to the web thickness t_w . For a column with a T-section, the Euler critical force for flexural buckling about the weak axis z may be written as:

$$N_{cr,f} = \frac{\pi^2 E I_{f,z}}{L_{eff}^2} \quad (3)$$

where:

$I_{f,z}$ – second moment of area of the equivalent T-section about the weak axis z .

According to Eurocode 3 [1], the relative slenderness of the column in flexural buckling may be written as:

$$\bar{\lambda}_f = \sqrt{\frac{A_f f_y}{N_{cr,f}}} = \frac{L_{eff}}{i_{f,z} \lambda_1} \quad (4)$$

where:

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}; \quad i_{f,z} = \sqrt{\frac{I_{f,z}}{A_f}}$$

A_f – area of the equivalent T-section.

Substituting equation (2) into (4) gives the left-hand side of equation (1). The right-hand side of inequality (1) results

$$\bar{\lambda}_f = \frac{k_c L_c}{i_{f,z} \lambda_1} \leq \bar{\lambda}_{c0} \frac{M_{c,Rd}}{M_{y,Ed}} \quad (1)$$

gdzie oznaczenia przyjęto jak w formule (6.59) z normy [1].

W przypadku, gdy spełniony jest warunek (1), to nie oznacza, że element jest całkowicie zabezpieczony przed zwichrzeniem przy dowolnej wartości momentu zginającego $M_{y,Ed} \leq M_{c,Rd}$. Spełnienie warunku oznacza, że moment zginający $M_{y,Ed}$ ma na tyle małą wartość, że nie spowoduje zwichrzenia elementu, tzn. nie zostanie przekroczona nośność elementu na zwichrzenie. Jednocześnie, jeśli warunek (1) nie jest spełniony, to należy sprawdzać nośność elementu na zwichrzenie wg bardziej skomplikowanej formuły (6.60) [1] lub można to robić wg dokładniejszych procedur. Wzór (1) wyprowadzono, sprowadzając zagadnienie zwichrzenia belki zginanej (rysunek 5a) do zagadnienia wyboczenia równoważnego pręta ściskanego na długości zmiennej siły (rysunek 5b) zależną od rozkładu momentów zginających. Długość równoważnego pręta ściskanego L_{eff} przyjęto jako iloczyn rozpiętości belki L_c pomiędzy punktami przytrzymującymi pas ściskany i współczynnika korygującego k_c zależnego od rozkładu momentów zginających w belce na analizowanym odcinku między stężeniami:

$$L_{eff} = k_c L_c \quad (2)$$

gdzie:

k_c – współczynnik poprawkowy uwzględniający rozkład momentów zginających w belce na analizowanym odcinku między stężeniami wg tablicy 6.6 [1],

L_c – odległość między stężeniami stabilizującymi punktowo pas ściskany w kierunku bocznym.

Przekrój zastępczego słupa (rysunek 5b) jest teownikiem i składa się z pasa ściskanego belki oraz 1/3 ściskanej części jej środnika. W praktyce najczęściej jest to prostokąt o wysokości 1/6 wysokości środnika h_w i szerokości równej grubości ścianki środnika t_w . W przypadku słupa o przekroju teownika, siłę krytyczną wyboczenia giętnego Eulera względem osi słabszej z można zapisać jako:

$$N_{cr,f} = \frac{\pi^2 E I_{f,z}}{L_{eff}^2} \quad (3)$$

gdzie:

$I_{f,z}$ – moment bezwładności teowego przekroju zastępczego względem osi słabszej z .

Zgodnie z Eurokodem 3 [1], smukłość względną słupa przy wyboczeniu giętym można zapisać jako:

$$\bar{\lambda}_f = \sqrt{\frac{A_f f_y}{N_{cr,f}}} = \frac{L_{eff}}{i_{f,z} \lambda_1} \quad (4)$$

gdzie:

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}; \quad i_{f,z} = \sqrt{\frac{I_{f,z}}{A_f}}$$

A_f – pole zastępczego przekroju teowego.

Podstawiając równanie (2) do (4), otrzymujemy lewą stronę równania (1). Prawa strona nierówności (1) wyni-

from the limiting value of the relative slenderness at which the lateral torsional buckling reduction factor $\chi_{LT} = 1.0$. Clause 6.3.2.2(4) [1] states that the stability condition reduces to the cross-section resistance condition if:

$$\bar{\lambda}_{LT} \leq \bar{\lambda}_{LT,0} \text{ lub } \frac{M_{Ed}}{M_{cr}} \leq \bar{\lambda}_{LT,0}^2 \quad (5)$$

In the simplified method of clause 6.3.2.4 [1], an analogous limiting slenderness of the compression flange was adopted in the form:

$$\bar{\lambda}_f \leq \bar{\lambda}_{c0} = \bar{\lambda}_{LT,0} + 0,1 = 0,4 + 0,1 = 0,5 \quad (6)$$

The National Annex NA.18 [1] recommends, however, that the limiting value of the slenderness be taken as:

$$\bar{\lambda}_f \leq \bar{\lambda}_{c0} = 0,4 \quad (7)$$

Where a member satisfies condition (6 or 7), it may be considered fully protected against lateral torsional buckling. This applies even where the bending moment in the beam is equal to the bending resistance of the cross-section $M_{y,Ed} = M_{c,Rd}$ (the cross-section resistance is utilised in 100%). Where $M_{y,Ed} < M_{c,Rd}$, standard [1] adopts an approach consisting in increasing the limiting relative slenderness in proportion to the bending moment:

$$\bar{\lambda}_f \leq \bar{\lambda}_{c0} \frac{M_{c,Rd}}{M_{y,Ed}} \quad (8)$$

The last term of equation (1 and 8) allows for the level of utilisation of the cross-section. Use is made here of a rule known from strength of materials. In a beam in bending, the force in the compression and tension flanges is proportional to the bending moment. In many real situations the approximation may be adopted (a conservative, safe assumption) that the flange forces are equal to the bending moment divided by the distance between the centroids of the flanges.

Comparison of the simplified and the rigorous method for assessing lateral torsional buckling

In order to assess the accuracy of the simplified method of lateral torsional buckling analysis of beams, it was compared with the method presented in clause 6.3.2.3 [1], based on the lateral torsional buckling curves for rolled I-sections and their welded equivalents. For this purpose parametric analyses were carried out. Beams with cross-sections built up from three plates corresponding to the dimensions of IPE 120, 360, 600 and HEA 120, 360, 700 sections, made of S235 steel, were analysed (Tables 1 ÷ 4). In the comparative analyses, the geometrical dimensions of the cross-sections of hot-rolled sections were adopted, disregarding the root fillets, and with plate thicknesses corresponding strictly to the wall thicknesses of those sections to an accuracy of 0.1 mm. This made it possible to compare precisely the influence of the fabrication technology of the cross-section (hot-rolled and welded sections), disregarding the approximation resulting from the standard ranges of manufactured plate thicknesses. The analyses also took into account various static schemes of beams:

ka z granicznej wartości smukłości względnej, przy której współczynnik zwichrzenia $\chi_{LT} = 1,0$. W pkt 6.3.2.2 (4) [1] podano, że warunek stateczności sprowadza się do warunku nośności przekroju, jeśli:

$$\bar{\lambda}_{LT} \leq \bar{\lambda}_{LT,0} \text{ lub } \frac{M_{Ed}}{M_{cr}} \leq \bar{\lambda}_{LT,0}^2 \quad (5)$$

W metodzie uproszczonej pkt 6.3.2.4 [1], analogiczną smukłość graniczną pasa ściskanego przyjęto w formie:

$$\bar{\lambda}_f \leq \bar{\lambda}_{c0} = \bar{\lambda}_{LT,0} + 0,1 = 0,4 + 0,1 = 0,5 \quad (6)$$

Przy czym załącznik krajowy NA.18 [1] zaleca przyjmować wartość graniczną smukłości:

$$\bar{\lambda}_f \leq \bar{\lambda}_{c0} = 0,4 \quad (7)$$

W przypadku, gdy element spełnia warunek (6 lub 7), to można uznać, iż jest on całkowicie zabezpieczony przed zwichrzeniem. Nawet w sytuacji, gdy moment zginający w belce jest równy nośności przekroju na zginanie $M_{y,Ed} = M_{c,Rd}$ (nośność przekroju jest wykorzystana w 100%). W sytuacji, gdy $M_{y,Ed} < M_{c,Rd}$ w normie [1] przyjęto podejście polegające na proporcjonalnym, do momentu zginającego, zwiększeniu granicznej smukłości względnej:

$$\bar{\lambda}_f \leq \bar{\lambda}_{c0} \frac{M_{c,Rd}}{M_{y,Ed}} \quad (8)$$

Człon ostatni równania (1 i 8) uwzględnia poziom wytrzymałości przekroju. Wykorzystano tu regułę znaną z wytrzymałości materiałów. W belce zginanej siła w pasie ściskanym i rozciągany jest proporcjonalna do momentu zginającego. W wielu rzeczywistych sytuacjach można przyjąć przybliżenie (konserwatywne, bezpieczne założenie), że siły w pasach są równe momentowi zginającemu podzielonemu przez odległość pomiędzy środkami ciężkości pasów.

Porównanie uproszczonej i dokładnej metody oceny zwichrzenia

W celu oceny dokładności uproszczonej metody analizy zwichrzenia belek porównano ją z metodą przedstawioną w pkt 6.3.2.3 [1], bazującą na krzywych zwichrzenia dwuteowników walcowanych oraz ich spawanych odpowiedników. W tym celu przeprowadzono analizy parametryczne. Analizie poddano belki o przekrojach złożonych z trzech blach odpowiadających wymiarom kształtowników IPE 120, 360, 600 oraz HEA 120, 360, 700, wykonanych ze stali S235 (tabele 1 ÷ 4). W analizach porównawczych przyjmowano wymiary geometryczne przekrojów poprzecznych kształtowników walcowanych na gorąco z pominięciem wyokrąglenia naroży oraz o grubości blach ściśle odpowiadającej grubości ścianek tych kształtowników z dokładnością do 0,1mm. Ten zabieg umożliwił precyzyjne porównanie wpływu technologii wykonania przekroju (kształtowniki walcowane na gorąco oraz spawane) z pominięciem przybliżenia wynikającego z typoszeręgów grubości produkowanych blach. Podczas analiz uwzględniono również zróżnicowane schematy statyczne belek:

Table 1. Simply supported single-span beam with a constant bending moment along the member length

Tabela 1. Belka jednoprzęsłowa swobodnie podparta o stałym momencie zginającym na długości elementu

No./ Lp.	Section/Profil 1	a_{LT} 2	Par. 3	$\bar{\lambda}_{c0} = 0,5$ (6) L/h				$\bar{\lambda}_{c0} = 0,4$ (7) L/h			
				5 4	10 5	20 6	30 7	5 8	10 9	20 10	30 11
1	IPE 120 h/b _f = 1,88	–	U_k	1,000	0,661	0,331	0,220	1,000	0,529	0,264	0,176
2		0,34	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,884	0,650	0,488	1,000	0,884	0,650	0,488
3			U_b	1,000	0,748	0,508	0,452	1,000	0,598	0,407	0,361
4		0,49	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,844	0,591	0,443	1,000	0,844	0,591	0,443
5			U_b	1,000	0,783	0,559	0,498	1,000	0,627	0,447	0,398
6	IPE 360 h/b _f = 2,12	–	U_k	1,000	0,583	0,291	0,194	0,932	0,466	0,233	0,155
7		0,49	$\chi_{LT,mod}$	0,982	0,757	0,441	0,300	0,982	0,757	0,441	0,300
8			U_b	1,019	0,769	0,661	0,648	0,950	0,615	0,529	0,518
9		0,76	$\chi_{LT,mod}$	0,972	0,681	0,383	0,264	0,972	0,681	0,383	0,264
10			U_b	1,029	0,856	0,762	0,737	0,959	0,685	0,609	0,589
11	IPE 600 h/b _f = 2,73	–	U_k	0,882	0,441	0,221	0,147	0,706	0,353	0,176	0,118
12		0,49	$\chi_{LT,mod}$	0,903	0,610	0,314	0,205	0,903	0,610	0,314	0,205
13			U_b	0,977	0,723	0,703	0,717	0,782	0,578	0,562	0,573
14		0,76	$\chi_{LT,mod}$	0,859	0,533	0,276	0,187	0,859	0,533	0,276	0,187
15			U_b	1,028	0,828	0,801	0,786	0,822	0,662	0,640	0,629
16	HEA 120 h/b _f = 0,95	–	U_k	1,000	1,000	0,685	0,457	1,000	1,000	0,548	0,365
17		0,34	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,918	0,827	1,000	1,000	0,918	0,827
18			U_b	1,000	1,000	0,746	0,552	1,000	1,000	0,596	0,442
19		0,49	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,888	0,775	1,000	1,000	0,888	0,775
20			U_b	1,000	1,000	0,771	0,589	1,000	1,000	0,617	0,471
21	HEA 360 h/b _f = 1,17	–	U_k	1,000	1,000	0,554	0,369	1,000	0,886	0,443	0,295
22		0,34	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,986	0,832	0,684	1,000	0,986	0,832	0,684
23			U_b	1,000	1,014	0,666	0,540	1,000	0,898	0,533	0,432
24		0,49	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,981	0,781	0,632	1,000	0,981	0,781	0,623
25			U_b	1,000	1,020	0,709	0,592	1,000	0,904	0,567	0,474
26	HEA 700 h/b _f = 2,30	–	U_k	1,000	0,540	0,270	0,180	0,864	0,432	0,216	0,144
27		0,49	$\chi_{LT,mod}$	0,966	0,733	0,428	0,295	0,966	0,733	0,428	0,295
28			U_b	1,035	0,737	0,632	0,611	0,895	0,590	0,505	0,489
29		0,76	$\chi_{LT,mod}$	0,948	0,654	0,371	0,259	0,948	0,645	0,371	0,259
30			U_b	1,055	0,826	0,728	0,694	0,912	0,661	0,582	0,556

Hot-rolled and welded cross-sections. Parameter $k_c = 1.0$. Degrees of freedom restrained in the local coordinate system of the beam in accordance with PN-EN 1993-1-1: left end U_x, U_y, U_z, R_x ; right end U_y, U_z, R_x . At both ends the cross-section is free to warp/Przekroje walcowane na gorąco i spawane. Parametr $k_c = 1,0$. Zablokowane stopnie swobody w lokalnym układzie współrzędnych belki zgodnym z PN-EN 1993-1-1: lewy koniec U_x, U_y, U_z, R_x , prawy koniec U_y, U_z, R_x . Na obu końcach przekrój ma swobodę deplacji.

1) a simply supported single-span beam loaded at its ends by bending moments of equal value (which corresponds to the case of a constant bending moment along the whole length of the beam) – Table 1;

2) a simply supported single-span beam under a uniformly distributed constant load along the whole length – Table 2;

1) belka jednoprzęsłowa swobodnie podparta, obciążona na końcach momentami zginającymi o jednakowej wartości (co odpowiada przypadkowi stałego momentu zginającego na całej długości belki) – tabela 1;

2) belka jednoprzęsłowa swobodnie podparta, obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem stałym na całej długości – tabela 2;

Table 2. Simply supported single-span beam under a uniformly distributed load

Tabela 2. Belka jednoprzęsłowa swobodnie podparta równomiernie obciążona

No./ Lp.	Section/Profil 1	z_q 2	Par. 3	$\bar{\lambda}_{c0} = 0,5$ (6) L/h				$\bar{\lambda}_{c0} = 0,4$ (7) L/h			
				5	10	20	30	5	10	20	30
				4	5	6	7	8	9	10	11
1	IPE 120 $h/b_f = 1,88$ $\alpha_{LT} = 0,34$	–	U_k	1,000	0,703	0,352	0,234	1,000	0,563	0,281	0,188
2		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,870	0,629	0,478	1,000	0,870	0,629	0,478
3			U_b	1,000	0,809	0,559	0,491	1,000	0,647	0,447	0,393
4		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,973	0,779	0,599	1,000	0,973	0,779	0,599
5			U_b	1,000	0,723	0,451	0,391	1,000	0,578	0,361	0,313
6	IPE 360 $h/b_f = 2,12$ $\alpha_{LT} = 0,49$	–	U_k	1,000	0,620	0,310	0,207	0,992	0,496	0,248	0,165
7		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	0,964	0,707	0,396	0,280	0,964	0,707	0,396	0,280
8			U_b	1,037	0,877	0,784	0,738	1,029	0,701	0,627	0,591
9		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,894	0,580	0,387	1,000	0,894	0,580	0,387
10			U_b	1,000	0,693	0,534	0,534	0,992	0,555	0,427	0,428
11	IPE 600 $h/b_f = 2,73$ $\alpha_{LT} = 0,49$	–	U_k	0,939	0,469	0,235	0,156	0,751	0,375	0,188	0,125
12		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	0,873	0,547	0,284	0,194	0,873	0,547	0,284	0,194
13			U_b	1,076	0,858	0,826	0,808	0,860	0,686	0,661	0,647
14		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,773	0,417	0,270	1,000	0,773	0,417	0,270
15			U_b	0,939	0,607	0,562	0,580	0,751	0,486	0,450	0,464
16	HEA 120 $h/b_f = 0,95$ $\alpha_{LT} = 0,34$	–	U_k	1,000	1,000	0,729	0,486	1,000	1,000	0,583	0,389
17		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,917	0,826	1,000	1,000	0,917	0,826
18			U_b	1,000	1,000	0,794	0,588	1,000	1,000	0,635	0,471
19		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,992	0,919	1,000	1,000	0,992	0,919
20			U_b	1,000	1,000	0,734	0,528	1,000	1,000	0,587	0,423
21	HEA 360 $h/b_f = 1,17$ $\alpha_{LT} = 0,34$	–	U_k	1,000	1,000	0,589	0,393	1,000	0,943	0,471	0,314
22		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,983	0,808	0,654	1,000	0,983	0,808	0,654
23			U_b	1,000	1,017	0,729	0,601	1,000	0,959	0,583	0,480
24		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,937	0,816	1,000	1,000	0,937	0,816
25			U_b	1,000	1,000	0,629	0,482	1,000	0,943	0,503	0,385
26	HEA 700 $h/b_f = 2,30$ $\alpha_{LT} = 0,49$	–	U_k	1,000	0,575	0,287	0,192	0,920	0,460	0,230	0,153
27		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	0,946	0,684	0,390	0,280	0,946	0,684	0,390	0,280
28			U_b	1,057	0,841	0,737	0,684	0,972	0,673	0,590	0,547
29		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,873	0,557	0,374	1,000	0,873	0,557	0,374
30			U_b	1,000	0,659	0,516	0,512	0,920	0,527	0,413	0,410

Hot-rolled cross-sections. Parameter $k_c = 0,94$. Degrees of freedom restrained in the local coordinate system of the beam in accordance with PN-EN 1993-1-1: left end U_x, U_y, U_z, R_x ; right end U_y, U_z, R_x . At both ends the cross-section is free to warp/Przekroje walcowane na gorąco. Parametr $k_c = 0,94$. Zablokowane stopnie swobody w lokalnym układzie współrzędnych belki zgodnym z PN-EN 1993-1-1: lewy koniec U_x, U_y, U_z, R_x , prawy koniec U_y, U_z, R_x . Na obu końcach przekrój ma swobodę deplanacji.

3) a single-span beam rigidly fixed at one end and pinned at the other, under a uniformly distributed constant load along the whole length (which corresponds to the end span of a multi-span beam) – Table 3.

4) a single-span beam rigidly fixed at both ends, under a uniformly distributed constant load along the whole length

3) belka jednoprzęsłowa sztywno zamocowana na jednym końcu i przegubowo podparta na drugim, obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem stałym na całej długości (co odpowiada skrajnemu przęsłu belki wieloprzęsłowej) – tabela 3.

4) belka jednoprzęsłowa sztywno zamocowana na obu końcach, obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem sta-

Table 3. Single-span beam pinned at one end and fully fixed at the other, under a uniformly distributed load

Tabela 3. Belka jednoprzęsłowa zamocowana z jednej strony przegubowo z drugiej sztywno równomiernie obciążona

No./ Lp.	Section/Profil 1	z_q 2	Par. 3	$\bar{\lambda}_{c0} = 0,5$ (6) L/h				$\bar{\lambda}_{c0} = 0,4$ (7) L/h			
				5 4	10 5	20 6	30 7	5 8	10 9	20 10	30 11
1	IPE 120 $h/b_f = 1,88$ $\alpha_{LT} = 0,34$	–	U_k	1,000	0,727	0,363	0,242	1,000	0,581	0,291	0,194
2		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,948	0,796	0,682	1,000	0,948	0,796	0,682
3			U_b	1,000	0,767	0,456	0,355	1,000	0,613	0,365	0,284
4		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,964	0,864	1,000	1,000	0,964	0,864
5			U_b	1,000	0,727	0,377	0,280	1,000	0,581	0,301	0,224
6	IPE 360 $h/b_f = 2,12$ $\alpha_{LT} = 0,49$	–	U_k	1,000	0,640	0,320	0,213	1,000	0,512	0,256	0,171
7		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,817	0,544	0,411	1,000	0,817	0,544	0,411
8			U_b	1,000	0,783	0,588	0,519	1,000	0,627	0,471	0,415
9		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,859	0,682	1,000	1,000	0,859	0,682
10			U_b	1,000	0,640	0,373	0,313	1,000	0,512	0,298	0,250
11	IPE 600 $h/b_f = 2,73$ $\alpha_{LT} = 0,49$	–	U_k	0,970	0,485	0,242	0,162	0,776	0,388	0,194	0,129
12		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	0,945	0,680	0,406	0,306	0,945	0,680	0,406	0,306
13			U_b	1,026	0,713	0,597	0,528	0,821	0,571	0,477	0,423
14		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,979	0,723	0,515	1,000	0,979	0,723	0,515
15			U_b	0,970	0,495	0,335	0,314	0,776	0,396	0,268	0,251
16	HEA 120 $h/b_f = 0,95$ $\alpha_{LT} = 0,34$	–	U_k	1,000	1,000	0,753	0,502	1,000	1,000	0,602	0,401
17		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,983	0,931	1,000	1,000	0,983	0,931
18			U_b	1,000	1,000	0,765	0,539	1,000	1,000	0,612	0,431
19		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
20			U_b	1,000	1,000	0,753	0,502	1,000	1,000	0,602	0,401
21	HEA 360 $h/b_f = 1,17$ $\alpha_{LT} = 0,34$	–	U_k	1,000	1,000	0,609	0,406	1,000	0,974	0,487	0,325
22		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,907	0,807	1,000	1,000	0,907	0,807
23			U_b	1,000	1,000	0,671	0,503	1,000	0,974	0,537	0,402
24		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	1,000	0,983	1,000	1,000	1,000	0,983
25			U_b	1,000	1,000	0,609	0,413	1,000	0,974	0,487	0,330
26	HEA 700 $h/b_f = 2,30$ $\alpha_{LT} = 0,49$	–	U_k	1,000	0,594	0,297	0,198	0,950	0,475	0,237	0,158
27		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,801	0,545	0,418	1,000	0,801	0,545	0,418
28			U_b	1,000	0,741	0,545	0,473	0,950	0,593	0,436	0,379
29		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,838	0,660	1,000	1,000	0,838	0,660
30			U_b	1,000	0,594	0,354	0,300	0,950	0,475	0,283	0,240

Hot-rolled cross-sections. Parameter $k_y = 0,91$. Degrees of freedom restrained in the local coordinate system of the beam in accordance with PN-EN 1993-1-1: left end U_x, U_y, U_z, R_x, R_y ; right end U_y, U_z, R_x . At both ends the cross-section is free to warp/Przekroje walcowane na gorąco. Parametr $k_y = 0,91$. Zablokowane stopnie swobody w lokalnym układzie współrzędnych belki zgodnie z PN-EN 1993-1-1: lewy koniec U_x, U_y, U_z, R_x, R_y , prawy koniec U_y, U_z, R_x . Na obu końcach przekrój ma swobodę deplanacji.

(which corresponds to the internal spans of a multi-span beam) – Table 4.

All the beams were free to warp at both ends. In addition, the point of load application (top or bottom flange) and the beam span ($L = 5h, 10h, 20h, 30h$, where h denotes the depth of the cross-section) were taken into account. Table 1 gives

łym na całej długości (co odpowiada przęsłom pośrednim belki wieloprzęsłowej) – tabela 4.

Wszystkie belki na obu końcach miały swobodę deplanacji. Ponadto uwzględniono miejsca przyłożenia obciążenia (półka górna lub dolna) oraz rozpiętość belki ($L = 5h, 10h, 20h, 30h$, gdzie h oznacza wysokość przekroju). W tabeli 1

Table 4. Single-span beam fully fixed at both ends, under a uniformly distributed load

Tabela 4. Belka jednoprzęsłowa zamocowana z obu stron sztywno, równomiernie obciążona

No./ Lp.	Section/Profil	z_q	Par.	$\bar{\lambda}_{c0} = 0,5$ (6) L/h				$\bar{\lambda}_{c0} = 0,4$ (7) L/h			
				5	10	20	30	5	10	20	30
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	IPE 120 $h/b_f = 1,88$ $\alpha_{LT} = 0,34$	–	U_k	1,000	0,735	0,367	0,245	1,000	0,588	0,294	0,196
2		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	0,916	0,757	0,657	1,000	0,916	0,757	0,657
3			U_b	1,000	0,802	0,486	0,373	1,000	0,642	0,388	0,298
4		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	1,000	0,937	1,000	1,000	1,000	0,937
5			U_b	1,000	0,735	0,367	0,261	1,000	0,588	0,294	0,209
6	IPE 360 $h/b_f = 2,12$ $\alpha_{LT} = 0,49$	–	U_k	1,000	0,647	0,324	0,216	1,000	0,518	0,259	0,173
7		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	0,987	0,753	0,480	0,373	0,987	0,753	0,480	0,373
8			U_b	1,013	0,860	0,674	0,578	1,013	0,688	0,539	0,463
9		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,953	0,808	1,000	1,000	0,953	0,808
10			U_b	1,000	0,647	0,340	0,267	1,000	0,518	0,272	0,214
11	IPE 600 $h/b_f = 2,73$ $\alpha_{LT} = 0,49$	–	U_k	0,980	0,490	0,245	0,163	0,784	0,392	0,196	0,131
12		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	0,901	0,601	0,359	0,284	0,901	0,601	0,359	0,284
13			U_b	1,088	0,815	0,683	0,576	0,871	0,652	0,546	0,461
14		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,849	0,653	1,000	1,000	0,849	0,653
15			U_b	0,980	0,490	0,289	0,250	0,784	0,392	0,231	0,200
16	HEA 120 $h/b_f = 0,95$ $\alpha_{LT} = 0,34$	–	U_k	1,000	1,000	0,761	0,507	1,000	1,000	0,609	0,406
17		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,963	0,909	1,000	1,000	0,963	0,909
18			U_b	1,000	1,000	0,790	0,558	1,000	1,000	0,632	0,446
19		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
20			U_b	1,000	1,000	0,761	0,507	1,000	1,000	0,609	0,406
21	HEA 360 $h/b_f = 1,17$ $\alpha_{LT} = 0,34$	–	U_k	1,000	1,000	0,615	0,410	1,000	0,985	0,492	0,328
22		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,866	0,760	1,000	1,000	0,866	0,760
23			U_b	1,000	1,000	0,710	0,540	1,000	0,985	0,568	0,432
24		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
25			U_b	1,000	1,000	0,615	0,410	1,000	0,985	0,492	0,328
26	HEA 700 $h/b_f = 2,30$ $\alpha_{LT} = 0,49$	–	U_k	1,000	0,600	0,300	0,200	0,960	0,480	0,240	0,160
27		+h/2	$\chi_{LT,mod}$	0,949	0,736	0,488	0,386	0,971	0,736	0,488	0,386
28			U_b	1,054	0,815	0,615	0,518	0,989	0,652	0,492	0,415
29		-h/2	$\chi_{LT,mod}$	1,000	1,000	0,935	0,748	1,000	1,000	0,935	0,784
30			U_b	1,000	0,600	0,321	0,255	0,960	0,480	0,257	0,204

Hot-rolled cross-sections. Parameter $k_c = 0.90$. Degrees of freedom restrained in the local coordinate system of the beam in accordance with PN-EN 1993-1-1: left end U_x, U_y, U_z, R_x, R_y ; right end U_y, U_z, R_x, R_y . At both ends the cross-section is free to warp/Przekroje walcowane na gorąco. Parametr $k_c = 0,90$. Zablockowane stopnie swobody w lokalnym układzie współrzędnych belki zgodnym z PN-EN 1993-1-1: lewy koniec U_x, U_y, U_z, R_x, R_y , prawy koniec U_y, U_z, R_x, R_y . Na obu końcach przekrój ma swobodę deplanacji.

the results of the analyses of a simply supported beam with a constant bending moment along the length of the beam. At the left-hand end of the beam the degrees of freedom U_x, U_y, U_z and R_x were restrained. At the right-hand end U_y, U_z, R_x were restrained. At both ends the cross-section was free to warp (U_y, R_x – respectively translations in the direction of axis “i” and rotations about axis “i” of the local coordinate system of the member in accordance with [1] (Figure 5)). Column 1 of Table 1 gives the type of the analysed section and the value of the ratio of the section depth h to the flange width b_f , and column 2 gives the value of the parameter α_{LT} , determined from the lateral torsional buckling curve of Table 6.5 [1]. The lower value refers to hot-rolled sections and the higher one to sections of the same dimensions fabricated as welded. Column 3 gives the

podano wyniki analiz belki swobodnie podpartej o stałym momencie zginającym na długości belki. Na lewym końcu belki zablockowano stopnie swobody U_x, U_y, U_z oraz R_x . Na prawym końcu zablockowano U_y, U_z, R_x . Na obu końcach przekrój miał swobodę deplanacji (U_y, R_x – odpowiednio translacje w kierunku osi „i” oraz rotacje wokół osi „i” lokalnego układu współrzędnych pręta zgodnym z [1] (rysunek 5)). W kolumnie 1, tabeli 1 podano rodzaj analizowanego profilu i wartość ilorazu wysokości profilu h do szerokości półki b_f , a w kolumnie 2 podano wartość parametru α_{LT} , ustaloną na podstawie krzywej zwichrzeniowej z tablicy 6.5 [1]. Wartość mniejsza odnosi się do kształtowników walcowanych na gorąco, a większa do kształtowników o tych samych wymiarach wykonanych jako spawane. W kolumnie 3 oznaczo-

names of the rows with results. U_k is the maximum utilisation of the cross-section at which the member does not undergo lateral torsional buckling, determined according to the simplified procedure after transforming expression (1):

$$U_k = \frac{M_{y,Ed}}{M_{c,Rd}} = \bar{\lambda}_{c0} \frac{i_{f,z}\lambda_1}{k_c L_c} \leq 1,0 \quad (9)$$

The row denoted $\chi_{LT,mod}$ gives the modified lateral torsional buckling reduction factor according to expression (6.58) [1], allowing for the correction due to the bending moment distribution. U_b is the utilisation of the member allowing for lateral torsional buckling described by the factor $\chi_{LT,mod}$ (clause 6.3.2.3 [1]) according to the expression:

$$U_b = \frac{U_k}{\chi_{LT,mod}} \quad (10)$$

Columns 4 – 7 of Table 1 contain the results of the analyses of beams with spans $L = 5h, 10h, 20h, 30h$ (where h is the depth of the beam cross-section) and $\bar{\lambda}_{c0} = 0,5$. Columns 8 – 11 contain the results of the analyses of beams with identical spans, but $\bar{\lambda}_{c0} = 0,4$. The analysed range of beam spans of 5 – 30h occurs most frequently in engineering practice.

Similar analyses were carried out for the following beams:

1) a simply supported single-span beam under a uniformly distributed constant load along the whole length (Table 2);

2) a single-span beam rigidly fixed at one end and pinned at the other, under a uniformly distributed constant load along the whole length (Table 3), which corresponds to the end span of a multi-span beam;

3) a single-span beam rigidly fixed at both ends, under a uniformly distributed constant load along the whole length (Table 4), which corresponds to the internal spans of a multi-span beam.

For these beams, the influence of the point of load application over the depth of the cross-section on the resistance was additionally investigated: $z_q = +h/2$ – top flange; $z_q = -h/2$ – bottom flange.

Table 5 summarises the results of the analyses from Tables 1 – 4. Column 2 indicates the limiting slenderness condition $\bar{\lambda}_{c0}$. Column 3, headed n , gives the number of cases analysed. Columns 4, 5 and 6 give respectively the minimum, maximum and mean value of U_b . Column 7 gives the number of cases

no nazwy wierszy z wynikami. U_k to maksymalne wyżeczenie przekroju, przy którym element nie ulega zwichrzeniu, wyznaczone wg procedury uproszczonej po przekształceniu wzoru (1):

$$U_k = \frac{M_{y,Ed}}{M_{c,Rd}} = \bar{\lambda}_{c0} \frac{i_{f,z}\lambda_1}{k_c L_c} \leq 1,0 \quad (9)$$

W wierszu oznaczonym $\chi_{LT,mod}$ podano zmodyfikowany współczynnik zwichrzenia wg wzoru (6.58) [1] uwzględniający korektę ze względu na rozkład momentów zginających. U_b to wyżeczenie elementu z uwzględnieniem zwichrzenia opisanego współczynnikiem $\chi_{LT,mod}$ (pkt 6.3.2.3 [1]) wg wzoru:

$$U_b = \frac{U_k}{\chi_{LT,mod}} \quad (10)$$

W kolumnach 4 – 7 tabeli 1 zawarto wyniki analiz dotyczących belek o rozpiętości $L = 5h, 10h, 20h, 30h$ (gdzie h to wysokość przekroju belki) i $\bar{\lambda}_{c0} = 0,5$. W kolumnach 8 – 11 zawarto wyniki analiz belek o identycznych rozpiętościach, ale $\bar{\lambda}_{c0} = 0,4$. Analizowany przedział rozpiętości belek 5 – 30h najczęściej występuje w praktyce inżynierskiej.

Podobne analizy przeprowadzono w przypadku belki:

1) jednoprzęsłowej swobodnie podpartej, obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem stałym na całej długości (tabela 2);

2) jednoprzęsłowej sztywno zamocowanej na jednym końcu i przegubowo na drugim, obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem stałym na całej długości (tabela 3), co odpowiada skrajnemu przęsłu belki wieloprzęsłowej;

3) jednoprzęsłowej sztywno zamocowanej na obu końcach, obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem stałym na całej długości (tabela 4), co odpowiada przęsłom pośrednim belki wieloprzęsłowej.

W przypadku tych belek badano dodatkowo wpływ na nośność punktu przyłożenia obciążenia na wysokości przekroju: $z_q = +h/2$ – półka górna; $z_q = -h/2$ – półka dolna.

W tabeli 5 dokonano podsumowania wyników analiz z tabel 1 – 4. W kolumnie 2 wskazano warunek smukłości granicznej $\bar{\lambda}_{c0}$. Kolumna 3 z nagłówkiem n opisuje liczbę przeanalizowanych przypadków. W kolumnach 4, 5 i 6 podano odpowiednio minimalną, maksymalną i średnią wartość U_b . W ko-

Table 5. Summary statistics of the results from Tables 1 to 4 comparing the simplified assessment method with the detailed method
Tabela 5. Statystyka zbiorcza wyników analiz z tabel 1 – 4 porównujących procedurę uproszczoną z metodą dokładną

Tables/Tabele	$\bar{\lambda}_{c0}$	n	Min U_b	Max U_b	Mean U_b / Średnie U_b	Number $U_b > 1$ / Liczba $U_b > 1$	% $U_b > 1$	Max unused resistance 1 – min U_b / niewykorzystana nośność 1 – min U_b
Table 1/Tabela 1	0,5	48	0,452	1,055	0,794	7	14,6	54,8%
	0,4	48	0,361	1,000	0,680	0	0,0	63,9%
Table 2/Tabela 2	0,5	48	0,391	1,076	0,771	4	8,3	60,9%
	0,4	48	0,313	1,029	0,669	1	2,1	68,7%
Table 3/Tabela 3	0,5	48	0,280	1,026	0,686	1	2,1	72,0%
	0,4	48	0,224	1,000	0,604	0	0,0	77,6%
Table 4/Tabela 4	0,5	48	0,250	1,088	0,701	3	6,2	75,0%
	0,4	48	0,200	1,013	0,617	1	2,1	80,0%
Total/Razem		384	0,200	1,088	0,690	17	4,4	80,0%

with a value of $U_b > 1$, and column 8 shows the percentage share of this number in the total number of cases. Column 9 gives information on the maximum unused resistance of the member.

Conclusions

The parametric analyses carried out have shown that the simplified procedure for assessing lateral torsional buckling according to clause 6.3.2.4 of PN-EN 1993-1-1 does not guarantee safety in all design cases. In the set of 384 different cases analysed (cross-section, span, static scheme, point of load application, fabrication technology), 17 cases (4.4%) were found in which the value of the index U_b exceeds 1.0. This means that a member accepted by the simplified procedure does not satisfy the condition of the lateral torsional buckling resistance determined by the rigorous method.

Exceedances of the resistance are concentrated in a clearly defined risk zone: $L/h \leq 10$; load applied to the top flange $z_q = +h/2$ and cross-sections of high slenderness $h/b_f \geq 2.0$. The largest exceedance was recorded in the case of the cross-section IPE 600 ($h/b_f = 2.73$) at $L/h = 5$ – in the variant of the beam fixed at both ends $U_b = 1.088$ was obtained, and for the simply supported beam $U_b = 1.076$. This result is contrary to engineering intuition. The apparently most stable scheme (a beam fixed at both ends) generates the greatest risk of an unsafe assessment. This means that **the simplified procedure, by reducing the lateral torsional buckling problem to flexural buckling of the equivalent compression flange, is unable to take proper account of the favourable influence of the support conditions on the critical moment and corrects this effect too optimistically by means of the factor k_ϕ** . For spans $L/h = 20$ and 30 no case of $U_b > 1.0$ was found. This means that as the slenderness of the member increases, the simplified procedure becomes safe, but at the same time increasingly conservative.

The mean value of U_b over the whole set of results is about 0.69, which means that a designer using only the simplified procedure utilises on average only about 69% of the actual lateral torsional buckling resistance of the member. The smallest values of U_b (the greatest conservatism) were obtained in the case of beams of high slenderness ($L/h = 30$), hot-rolled, under loading of the bottom flange ($z_q = -h/2$). The extreme case is a beam fixed at both ends with an IPE 600 cross-section at $\bar{\lambda}_{c0} = 0.4$, for which $U_b = 0.200$, which corresponds to 80% of the lateral torsional buckling resistance being unused. Such great conservatism may lead in practice to uneconomic sizing of cross-sections or to an excessive densification of lateral restraints.

The limiting slenderness condition $\bar{\lambda}_{c0} = 0.4$, recommended by the National Annex, consistently gives smaller values of U_b and considerably reduces the number of unsafe cases in comparison with $\bar{\lambda}_{c0} = 0.5$ (only 2 cases of $U_b > 1.0$ against 15 for $\bar{\lambda}_{c0} = 0.5$). This is achieved at the cost of additional conservatism. The mean U_b decreases by about 18 – 22%. Nevertheless, the National Annex effectively limits the risk of an unsafe assessment and constitutes a strong argument for retaining it in design practice.

W kolumnie 7 umieszczono liczbę przypadków o wartości $U_b > 1$, a w kolumnie 8 pokazano udział procentowy tej liczby w ogólnej liczbie przypadków. W kolumnie 9 umieszczono informację na temat maksymalnej niewykorzystanej nośności elementu.

Wnioski

Przeprowadzone analizy parametryczne wykazały, że uproszczona procedura oceny zwichrzenia wg pkt 6.3.2.4 PN-EN 1993-1-1 nie gwarantuje bezpieczeństwa we wszystkich przypadkach obliczeniowych. W zbiorze 384 przeanalizowanych różnych przypadków (przekrój, rozpiętość, schemat statyczny, miejsce przyłożenia obciążenia, technologia wykonania) stwierdzono 17 przypadków (4,4%), w których wartość wskaźnika U_b przekracza 1,0. Oznacza to, że element dopuszczony przez procedurę uproszczoną nie spełnia warunku nośności na zwichrzenie wyznaczonej metodą dokładną.

Przekroczenia nośności koncentrują się w wyraźnie zdefiniowanej strefie ryzyka: $L/h \leq 10$; obciążenie przyłożone do górnej półki $z_q = +h/2$ oraz przekroje o dużej smukłości $h/b_f \geq 2,0$. Największe przekroczenie odnotowano w przypadku przekroju: IPE 600 ($h/b_f = 2,73$) przy $L/h = 5$ – w wariancie belki utwierdzonej na obu końcach uzyskano $U_b = 1,088$, a belki swobodnie podpartej $U_b = 1,076$. Wynik ten jest wbrew intuicji inżynierskiej. Schemat pozornie najbardziej stabilny (belka utwierdzona na obu końcach) generuje największe ryzyko niebezpiecznej oceny. Oznacza to, że **procedura uproszczona, redukując zagadnienie zwichrzenia do wyboczenia giętnego zastępczego pasa ściskanego, nie jest w stanie właściwie uwzględnić korzystnego wpływu warunków podparcia na moment krytyczny i nadmiernie optymistycznie koryguje ten efekt za pomocą współczynnika k_ϕ** . W przypadku rozpiętości $L/h = 20$ i 30 nie stwierdzono żadnego przypadku $U_b > 1,0$. Oznacza to, że wraz ze wzrostem smukłości elementu procedura uproszczona staje się bezpieczna, lecz jednocześnie coraz bardziej konserwatywna.

Średnia wartość U_b w całym zbiorze wyników wynosi ok. 0,69, co oznacza, że projektant stosujący wyłącznie procedurę uproszczoną przeciętnie wykorzystuje jedynie ok. 69% rzeczywistej nośności elementu na zwichrzenie. Najmniejsze wartości U_b (największy konserwaryzm) uzyskiwano w przypadku belek o dużej smukłości ($L/h = 30$), walcowanych na gorąco, przy obciążeniu dolnej półki ($z_q = -h/2$). Skrajnym przypadkiem jest belka utwierdzona obustronnie o przekroju IPE 600 przy $\bar{\lambda}_{c0} = 0,4$, dla której $U_b = 0,200$, co odpowiada niewykorzystaniu 80% nośności na zwichrzenie. Tak duży konserwaryzm może prowadzić w praktyce do nieekonomicznego wymiarowania przekrojów lub nadmiernego zagęszczania stężeń bocznych.

Warunek smukłości granicznej $\bar{\lambda}_{c0} = 0,4$, zalecany przez załącznik krajowy, daje konsekwentnie mniejsze wartości U_b i znacznie redukuje liczbę niebezpiecznych przypadków w porównaniu z $\bar{\lambda}_{c0} = 0,5$ (jedynie 2 przypadki $U_b > 1,0$ wobec 15 przy $\bar{\lambda}_{c0} = 0,5$). Odbywa się to kosztem dodatkowego konserwaryzmu. Średnie U_b zmniejsza się o ok. 18 – 22%. Mimo to załącznik krajowy skutecznie ogranicza ryzyko niebezpiecz-

The analyses revealed **three fundamental limitations of the simplified method**, resulting from its concept of reducing the lateral torsional buckling problem to flexural buckling of an equivalent compression member. **The first limitation** concerns the failure to take into account the point of load application over the depth of the cross-section. Loading of the top flange ($z_q = +h/2$) produces an additional destabilising effect which increases the susceptibility of the member to lateral torsional buckling. The simplified method neglects this effect, which leads to unsafe results. Loading of the bottom flange ($z_q = -h/2$) acts in a stabilising manner, and therefore in none of the analysed cases with $z_q = -h/2$ was $U_b > 1.0$ found.

The second limitation consists in not distinguishing the fabrication technology of the cross-section. Welded cross-sections are characterised by larger imperfections and a higher parameter α_{LT} than their hot-rolled counterparts, which reduces the lateral torsional buckling reduction factor $\chi_{LT, mod}$. The simplified procedure ignores this aspect. As a result, systematically larger values of U_b are obtained in the case of welded cross-sections, e.g. for IPE 600 at $L/h = 5$ in the variant of a beam with a constant bending moment: $\alpha_{LT} = 0.49$ gives $U_b = 0.977$, whereas $\alpha_{LT} = 0.76$ gives $U_b = 1.028$.

The third limitation results from an insufficient representation of the influence of the static scheme and of the bending moment distribution. Beams with rigid fixings (Tables 3 and 4) exhibit the smallest minimum values of U_b (the greatest conservatism) among all the schemes considered and, at the same time – in the risk zone – generate the largest exceedances of the resistance. This shows that the factor k_c is unable to reflect correctly the complex influence of the boundary conditions on the critical moment.

On the basis of the results obtained, conditions for the safe application of the simplified procedure were formulated: $L/h \geq 10$ or $h/b_f \leq 1.2$ or $z_q \leq 0$. Otherwise, verification of the lateral torsional buckling resistance by rigorous methods consisting in determining the critical moment M_{cr} is required. The simplified procedure for assessing lateral torsional buckling may be both unsafe (in the case of short beams with slender cross-sections under loading of the top flange) and excessively conservative (in the case of more slender beams with support conditions that favourably influence the critical moment). It should therefore be treated as an auxiliary and screening tool, useful for a quick preliminary assessment, but not suitable as a full substitute for the verification of lateral torsional buckling by the rigorous method.

Received: 06.04.2026
Revised: 12.06.2026
Published: 23.09.2026

nej oceny i stanowi mocny argument za jego utrzymaniem w praktyce projektowej.

Analizy ujawniły **trzy fundamentalne ograniczenia metody uproszczonej**, wynikające z jej koncepcji sprowadzenia problemu zwichrzenia do wyboczenia giętnego zastępczego pręta ściskanego. **Pierwsze ograniczenie** dotyczy braku uwzględnienia miejsca przyłożenia obciążenia na wysokości przekroju. Obciążenie górnej półki ($z_q = +h/2$) powoduje dodatkowy efekt destabilizujący, który zwiększa podatność elementu na zwichrzenie. Metoda uproszczona pomija ten efekt, co prowadzi do wyników niebezpiecznych. Obciążenie dolnej półki ($z_q = -h/2$) działa stabilizująco, dlatego w żadnym z przeanalizowanych przypadków z $z_q = -h/2$ nie stwierdzono $U_b > 1,0$.

Drugie ograniczenie polega na nierozróżnianiu technologii wykonania przekroju. Przekroje spawane charakteryzują się większymi imperfekcjami i wyższym parametrem α_{LT} niż ich walcowane na gorąco odpowiedniki, co zmniejsza współczynnik zwichrzenia $\chi_{LT, mod}$. Procedura uproszczona ignoruje ten aspekt. W efekcie w przypadku przekrojów spawanych uzyskuje się systematycznie większe wartości U_b , np. w przypadku IPE 600 przy $L/h = 5$ w wariancie belki ze stałym momentem zginającym: $\alpha_{LT} = 0,49$ daje $U_b = 0,977$, natomiast $\alpha_{LT} = 0,76$ daje $U_b = 1,028$.

Trzecie ograniczenie wynika z niedostatecznego odzworowania wpływu schematu statycznego i rozkładu momentów zginających. Belki z zamocowaniami sztywnymi (tabele 3 i 4) wykazują najmniejsze minimalne wartości U_b (największy konserwatyzm) spośród wszystkich rozpatrywanych schematów, a jednocześnie – w strefie ryzyka – generują największe przekroczenia nośności. Świadczy to o tym, że współczynnik k_c nie jest w stanie prawidłowo odzwierciedlić złożonego wpływu warunków brzegowych na moment krytyczny.

Na podstawie uzyskanych rezultatów sformułowano warunki bezpiecznego stosowania procedury uproszczonej: $L/h \geq 10$ lub $h/b_f \leq 1,2$ lub $z_q \leq 0$. W przeciwnym razie wymagana jest weryfikacja nośności na zwichrzenie metodami dokładnymi polegającymi na wyznaczaniu momentu krytycznego M_{cr} . Uproszczona procedura oceny zwichrzenia może być zarówno niebezpieczna (w przypadku krótkich belek o smukłych przekrojach przy obciążeniu górnej półki), jak i nadmiernie zachowawcza (dotycząca belek smuklejszych z warunkami podparcia korzystnie wpływającymi na moment krytyczny). Należy ją zatem traktować jako narzędzie pomocnicze i przesiewowe, przydatne do szybkiej oceny wstępnej, lecz nienadające się jako pełny substytut sprawdzenia zwichrzenia metodą dokładną.

Artykuł wpłynął do redakcji: 06.04.2026 r.
Otrzymano poprawiony po recenzjach: 12.06.2026 r.
Opublikowano: 23.09.2026 r.

Literature

- [1] PN-EN 1993-1-1:2006. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [2] SN003a-PL-EU. Informacje uzupełniające: Sprężysty moment krytyczny przy zwichrzeniu. Access Steel; 2005. Available from: [https://www.piks.com.pl/access-steel/]. Accessed: [2026-03-10].
- [3] CTCM. LTBeamN – software for lateral torsional buckling analysis. Available from: https://www.ctcm.com/. Accessed: 2026-03-10.

- [4] Kuchta K, Tylek I. O belkach stalowych niewrażliwych na zwichrzenie. Przegląd Budowlany. 2018; (1): [27 – 35].
- [5] Pałkowski S, Popiołek K. Zwichrzenie belek stalowych w ujęciu PN-EN 1993-1-1. Inżynieria i Budownictwo. 2008; (6): [299 – 302].
- [6] Stankiewicz B. Porównanie obliczania belek na zwichrzenie wg normy PN-EN 1993-1-1. Inżynieria i Budownictwo. 2011; (9): [478 – 481].