

dr inż. Tomasz Waśniewski^{1*)}

ORCID: 0000-0001-7303-4920

dr inż. Ewelina Kołodziejczyk¹⁾

ORCID: 0000-0002-3533-4145

Load-bearing capacity and second-order effects in slender prestressed columns

Nośność i efekty II rzędu w smukłych słupach sprężonych

DOI: 10.15199/33.2025.10.12

Abstract. This paper is a numerical analysis of the load carrying capacity and behaviour under the load of slender prestressed columns. In slender cantilever columns, which are mainly used in sway frame structures, column slenderness and its sensitivity to second-order effects is an important issue. The effect of prestressing on the capacity of a section loaded by a normal force and a bending moment was analysed. It is shown that the presence of prestressing force affects the entire range of the interaction diagram. An analysis of the effect of prestressing stress on the overall eccentricity of a cantilever column is presented later in this paper. It is found that the prestressing force can effectively reduce the second-order effects of column.

Keywords: columns; slender; prestressed; capacity; second order effects.

Streszczenie. Artykuł przedstawia numeryczną analizę nośności i zachowania smukłych słupów sprężonych pod obciążeniem. W smukłych słupach wspornikowych stosowanych przede wszystkim w nieusztynionych ustrojach szkieletowych, istotnym problemem jest ich smukłość i wrażliwość na efekty II rzędu. Analizie poddano wpływ naprężenia sprężającego na nośność przekroju obciążonego siłą normalną i momentem zginającym. Wykazano, że obecność siły sprężającej ma wpływ na cały zakres krzywej interakcji. Ponadto przedstawiono analizę wpływu naprężenia sprężającego na mimośród całkowity słupa wspornikowego. Wykazano, że siła sprężająca może skutecznie ograniczyć efekty II rzędu.

Słowa kluczowe: słupy; smukłe; sprężone; nośność; efekty II rzędu.

Slender columns are usually assessed as mainly compressed elements. It therefore seems unreasonable to introduce an additional force compressing concrete as a result of prestressing [1]. In the columns used in commercial buildings, and in particular in tall industrial or warehouse buildings with prefabricated frame structures, the governing internal forces are high bending moments. In these types of buildings, the columns are cantilevered and the bending moments are due to wind forces, eccentricity of the columns, e.g. roof girders, horizontal forces generated by the sliders, etc. In these cases, the load-bearing structure is usually designed as an unbraced system. Figure 1 shows an example of a load-bearing frame for an industrial hall with cranes, in which the columns are loaded by horizontal and vertical forces and work as sway system in the plane of the frame. In this case, if columns are plain reinforced concrete columns with a slenderness exceeding $\lambda = 200$, the consumption of longitudinal reinforcement will approach economically unjustifiable values of more than 250 kg/m³. It will therefore be necessary to increase the cross-sectional area of the reinforced concrete column and hence its self-weight. The use of prestressed concrete makes it possible to significantly reduce the amount of reinforcement. Prestressed columns complement the range of reinforced concrete columns when slenderness close to or exceeding $\lambda = 200$ is required. In addition to limiting the reinforcement ratio, for reasons of load-bearing capacity and deformability, prestressing the column makes it possible to transport and erect

Słupy oceniane są najczęściej jako elementy głównie ściskane. Wydaje się więc nieuzasadnione wprowadzanie dodatkowej siły ściskającej beton w wyniku sprężenia [1]. W słupach stosowanych w budownictwie kubaturowym, a przede wszystkim w wysokich budynkach przemysłowych bądź magazynowych o prefabrykowanej konstrukcji szkieletowej, dominującymi siłami wewnętrznymi są momenty zginające o dużej wartości. W tego typu budynkach słupy mają charakter wspornikowy, a momenty zginające są wynikiem oddziaływania sił od wiatru, mimośrodowego oparcia elementów na słupie, np. dźwigarów dachowych, sił poziomych generowanych przez suwnice itp. Wówczas ustroje nośne projektuje się zazwyczaj jako przesuwne. Na rysunku 1 przedstawiono przykładową ramę nośną hali przemysłowej z suwnicami, w której słupy obciążone są siłami poziomymi i pionowymi oraz pracują przesuwnie w płaszczyźnie ramy. W takim przypadku, jeżeli zastosujemy słupy żelbetowe o smukłości przekraczającej $\lambda = 200$, to zużycie zbrojenia podłużnego będzie zbliżało się do nieuzasadnionych ekonomicznie wartości – powyżej 250 kg/m³. Konieczne będzie zatem zwiększenie przekroju słupa żelbetowego, a co za tym idzie jego ciężaru. Zastosowanie sprężenia pozwala znacznie ograniczyć zużycie zbrojenia. Słupy sprężone są uzupełnieniem asortymentu słupów żelbetowych, gdy wymagana jest smukłość bliska lub przekraczająca $\lambda = 200$. Poza ograniczeniem stopnia zbrojenia, ze względu na nośność i odkształcalność, sprężenie słupa umożliwia transport i pionizację tak długich elementów bez ryzyka trwałego odkształcenia w wyniku zarysowania lub uplastycznienia zbrojenia w tych sytuacjach przejściowych.

¹⁾ Politechnika Łódzka, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska

^{*)} Correspondence address tomasz.wasniewski@p.lodz.pl

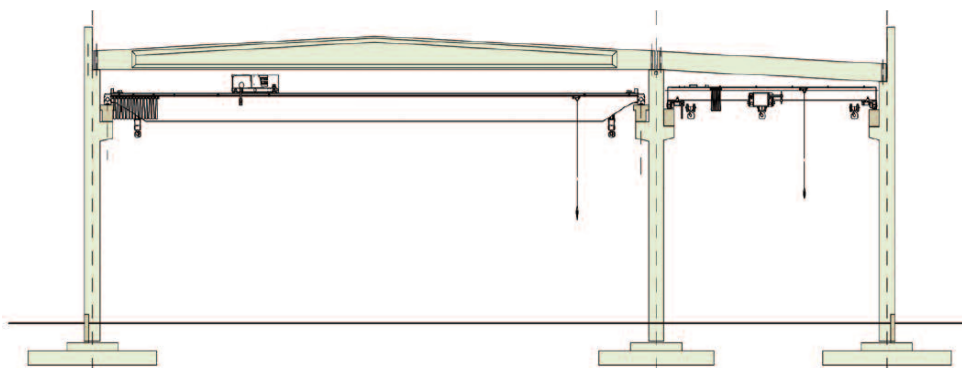


Fig. 1. Two-bay prefabricated frame with cranes

Rys. 1. Dwunawowa rama prefabrykowana z suwnicami

such long elements without the risk of permanent deformation due to cracking of concrete or yielding of the reinforcement steel in these transient situations.

The aim of this article is to explain the effect of prestressing on the load-bearing capacity of axially prestressed columns and to present the influence of prestressing force on the development of second-order effects in slender columns.

Column prestressing techniques

There are several ways of prestressing columns. Slender and long columns are usually prestressed in a similar way to beams or girders. Today, prestressed columns are usually made as prefabricated prestressed concrete elements. Mechanical anchorage at the ends of the columns would make them difficult to install and construct, so prestressing as post-tensioned concrete is not commonly used. Prestressed columns are not usually a stock product, but the number of elements in one order can be large. For this reason, the long-track prestressing method is usually used. This method involves producing several elements on a common long prestressing track. The length of the track varies from 50 to 200 m. Depending on the length of the track, the elements are arranged in a series, from several to a dozen, and the common tendons for all elements are hydraulically tensioned. The tendons are anchored in anchor blocks located at both ends of the track, and the force is transferred to the concrete after it has set by cutting the strings or by slowly releasing the force from the retaining blocks.

Prestressed concrete elements can be prestressed with full reinforcement or partial reinforcement [2, 3]. In the first case, all tendons or bars are prestressed to the maximum allowable level, close to the yield limit. No other longitudinal reinforcement is used here. In partially prestressed columns, ordinary reinforcement – typically bar reinforcement – is used in addition to the prestressing reinforcement. This means that only part of the reinforcement actively compresses the column sections. The addition of hot-rolled steel reinforcement improves the ductility of the sections – an important feature in view of the requirements of failure mitigation.

The idea of prestressing short columns can be achieved through active restraint [4]. In this case, the columns can be prestressed longitudinally or circumferentially, putting the core of the section into a state of complex stress. In this state, the compressive strength of the concrete increases, resulting in an

Celem artykułu jest wyjaśnienie wpływu sprężenia na nośność słupów sprężonych osiowo oraz przedstawienie wpływu siły sprężającej na rozwój efektów II rzędu w słupach smukłych.

Techniki sprężania słupów

Istnieje kilka sposobów sprężania słupów. Smukłe i długie słupy sprężane są zwykle w podobny sposób jak belki czy dźwigary. Obecnie słupy sprężone są zazwyczaj wykonywane jako prefabrykowane elementy strunobetonowe. Mechaniczne zakotwienie na końcach słupów utrudniałoby ich montaż i konstrukcję, dlatego sprężenie jako kablobetonowe nie jest powszechnie stosowane. Słupy sprężone nie są zazwyczaj produktem magazynowym, ale liczba elementów w jednym zamówieniu może być duża. Z tego powodu zazwyczaj stosuje się metodę długiego toru naciągowego. Metoda ta polega na produkcji kilku elementów na wspólnym długim torze sprężającym (50 – 200 m). W zależności od długości toru elementy są układane w szeregu – od kilku do kilkunastu – a wspólne ciągnięta do wszystkich elementów są napinane hydraulicznie. Ciężna są zakotwione w blokach kotwiących znajdujących się na obu końcach toru, a siła przekazana zostaje na beton po jego związaniu przez przecięcie strun lub hydrauliczne powolne zwolnienie siły z bloków oporowych.

Elementy strunobetonowe mogą być sprężane z pełnym lub częściowym zbrojeniem [2, 3]. W pierwszym przypadku, wszystkie ciągnięta lub pręty naciągane są do maksymalnego dopuszczalnego poziomu, bliskiego granicy plastyczności. Nie stosuje się wówczas żadnego innego zbrojenia podłużnego. W częściowo sprężonych słupach, obok zbrojenia sprężającego znajduje się zbrojenie miękkie – typowe zbrojenie prętowe. Oznacza to, że tylko część zbrojenia aktywnie spręża przekroje słupa. Dodatek zbrojenia ze stali gorąco walcowanej poprawia ciągliwość przekrojów – ważną cechą w świetle wymagań ograniczania skutków awarii.

Sprężenie krępych słupów może polegać na aktywnym skrupowaniu [4], a więc sprężeniu podłużnie lub obwodowo i wprowadzeniu rdzenia przekroju w stan złożonych naprężeń. W takim stanie zwiększa się wytrzymałość betonu na ściskanie, co powoduje zwiększenie nośności słupa [5]. Może to zostać osiągnięte przez zastosowanie silnego zbrojenia poprzecznego

increase in the load-bearing capacity of the column [5]. This can be achieved by the use of strong transverse reinforcement in the form of spirals or stirrups interacting with the longitudinal reinforcement. The spiral reinforcement can in this case, be compressed indirectly by deformation of the longitudinally compressed concrete core or directly by chemical compression using mortars or expansive resins [4]. In this case, a steel corset may be used instead of the internal spiral winding.

Transverse pre-stressing can also be induced using prestressing reinforcement made from a special shape memory alloy (FeSMA – *Shape Memory Alloy*). In this case, the internally or externally applied reinforcement is prestressed by heating, as a result of which the material shortens and transverse stresses are induced [6 ÷ 8]. It should be noted that this type of prestressing is effective in short, non-slender columns loaded mainly by normal force. The use of this type of prestressing in highly flexural columns (usually slender) is ineffective due to the strong limitation of the concrete restraining effect in the tensile zone of the flexural section.

Figure 2 shows examples of the distribution of prestressing reinforcement in a column. Unlike beams, in prestressed columns the reinforcement is arranged symmetrically without inducing a bending moment from the prestressing. This means that the resultant centre of gravity of the reinforcement coincides with the centre of gravity of the section. This approach is necessary in order not to induce an initial deflection from the prestressing, which is not allowed in the columns because it would cause additional unfavourable geometrical imperfections. In addition, the moments in the columns have a variable sign due to wind actions, so the prestressing must be chosen for the bending moments on both sides.

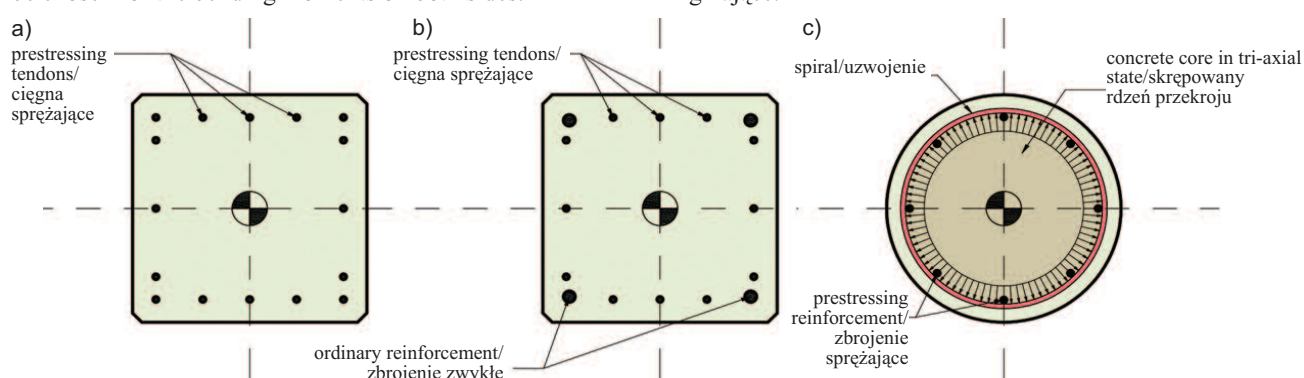


Fig. 2. Prestressing reinforcement arrangement: a) fully prestressed; b) partially prestressed; c) active confinement

Rys. 2. Rozkład zbrojenia sprężającego: a) w pełni sprężone; b) częściowo sprężone; c) sprężenie obwodowe

Another idea for prestressing columns is the use of prestressed plank inserts [9]. In this case, the column is formed using pre-stressed semi-finished elements that are encased in a form of poured concrete to form a prestressed composite section (Figure 3). This type of column reinforcement improves the load-bearing capacity and increases the stiffness of the column in the longitudinal direction.

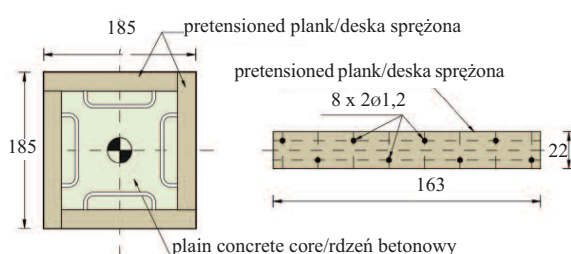


Fig. 3. Idea of prestressing using prestressed concrete plank inserts [9]

Rys. 3. Idea sprężenia z użyciem strunobetonowych wkładek deskowych [9]

w postaci spiral lub strzemion współpracujących ze zbrojeniem podłużnym. Zbrojenie spiralne można w tym przypadku sprężyć pośrednio przez postaciowe odkształcenie sprężanego podłużnie rdzenia betonowego lub bezpośrednio przez zastosowanie sprężenia chemicznego z wykorzystaniem zapraw lub żywic ekspansyjnych [4]. Zamiast wewnętrznego uzwojenia spiralnego stosowany jest wówczas stalowy gorset.

Wstępne naprężenia poprzeczne mogą być także wywołane przy użyciu zbrojenia sprężającego wykonanego ze specjalnego stopu z pamięcią kształtu (FeSMA – *Shape Memory Alloy*). W tym przypadku zbrojenie zastosowane wewnętrznie lub zewnętrznie jest sprężane przez podgrzanie, na skutek którego materiał ulega skróceniu, co wywołuje naprężenia poprzeczne [6 ÷ 8]. Należy zaznaczyć, że tego typu sprężenie jest skuteczne w słupach krępych, obciążonych głównie siłą normalną. Stosowanie tego rodzaju sprężenia w słupach silnie zginanych (zwykle smukłych) jest nieefektywne ze względu na silne ograniczenie efektu skrępowania betonu przez rozciąganą strefę zginanego przekroju.

Rysunek 2 przedstawia przykłady rozkładu zbrojenia sprężającego w słupie. W odróżnieniu od belek, w słupach sprężonych zbrojenie jest układane symetrycznie bez wywoływania momentu zginającego od sprężenia. Oznacza to, że wypadkowy środek ciężkości zbrojenia pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju. Takie podejście jest konieczne, aby nie wywołać wstępnego ugięcia od sprężenia, co jest niedopuszczalne w słupach, ponieważ wywoływałoby dodatkowe niekorzystne imperfekcje geometryczne. Poza tym w słupach, ze względu na oddziaływanie wiatru, momenty mają zmienny znak. Sprężenie należy zatem dobrać na obustronne momenty zginające.

Kolejnym pomysłem na sprężenie słupów jest zastosowanie sprężonych wkładek deskowych [9]. W tym przypadku słup formowany jest z użyciem sprężonych półprefabrykatów zamykanych w formę szalunku traconego zalewanego betonem. Powstaje wówczas sprężony przekrój zespolony (rysunek 3). Tego typu sposób zbrojenia słupa poprawia nośność oraz zwiększa sztywność słupa w kierunku podłużnym.

In Poland, the most common technique for prestressing columns is the long-tension track method or the spinning method used for the production of power or traction columns with annular cross-sections [10].

Bearing capacity analysis of a prestressed column section

The design of prestressed columns requires special attention. For the column, the prestressing force is a longitudinal compressive force with a certain specificity – in the successive loading phases of the element, its magnitude and geometric location in the cross-section are known, which results from the arrangement of the prestressing reinforcement and its state of stress (Figure 4). In contrast, an external load in the form of a longitudinal force applied with a known initial eccentricity causes displacements of the column axis and an increase in the eccentricity. This means that the two such different actions cannot be added together in the column resistance calculation.

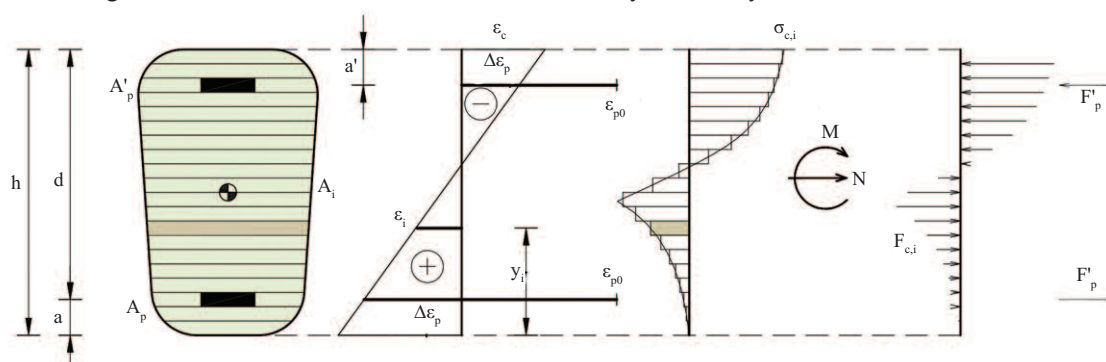


Fig. 4. Discretisation of a prestressed section

Rys. 4. Dyskretyzacja przekroju sprężonego

In order to assess the influence of selected factors on the resistance of a prestressed section, a non-linear analysis of the section was carried out using a stratified model [11]. The effectiveness of this type of method has been repeatedly confirmed [12]. The following assumptions were made in the presented calculation approach:

- only normal stresses are considered;
- cross-section remains plain in the full range of the load;
- the loading is monotonic, single, irreversible;
- the material relations σ - ϵ are determined for a uniaxial stress state;
- the strains of the reinforcement and the surrounding concrete are the same in both the compression and tension zones;
- the concrete in compression is described by a non-linear relation according to [5];
- concrete in tension is described by a non-linear relationship taking into account tension-stiffening [11];
- the prestressing steel is described according to the relation obtained in the uniaxial tension test (Figure 5);
- the prestressing force is taken as the initial strain of the reinforcement layer.

The relationships $M(N, \kappa)$ and $N(M, \epsilon)$ are determined by considering successive levels of strain in the cross-section and

W Polsce najbardziej rozpowszechnioną techniką sprężania słupów jest metoda długich torów naciąganych lub metoda wirowania stosowana do produkcji słupów energetycznych lub trakcyjnych o przekroju pierścieniowym [10].

Analiza nośności przekroju słupa sprężonego

Projektowanie słupów sprężonych wymaga szczególnej uwagi. Siła sprężająca jest bowiem w przypadku słupa podłużną siłą ściskającą o pewnej specyfice, tzn. w kolejnych fazach obciążenia elementu jej wielkość i geometryczne usytuowanie w przekroju jest znane, co wynika z rozmieszczenia zbrojenia sprężającego i stanu jego naprężenia (rysunek 4). Obciążenie zewnętrzne, w postaci siły podłużnej przyłożonej ze znanym mimośrodem początkowym, powoduje natomiast przemieszczenie osi słupa i przyrost mimośrodu. To oznacza, że w obliczeniach nośności słupa nie można sumować obu tak różnych oddziaływań.

W celu oceny wpływu wybranych czynników na nośność przekroju sprężonego przeprowadzono analizę nieliniową przekroju, stosując model warstwowy [11]. Skuteczność tego typu metody została wielokrotnie potwierdzona [12]. W prezentowanym podejściu obliczeniowym przyjęto następujące założenia:

- rozważa się tylko naprężenia normalne;
- w całym zakresie obciążenia obowiązuje zasada zachowania płaskiego przekroju;
- obciążenie jest monotoniczne, jednokrotne, nieodwracalne;
- materiałowe zależności σ - ϵ są ustalone jak w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia;
- odkształcenia zbrojenia i otaczającego je betonu są jednakowe zarówno w strefie ściskanej, jak i rozciąganej;
- beton ściskany opisany jest nieliniową zależnością wg [5];
- beton rozciągany opisany jest nieliniową zależnością z uwzględnieniem tension-stiffening [11];
- stal sprężająca opisana jest wg zależności uzyskanej w próbie jednoosiowego rozciągania (rysunek 5);
- siła sprężająca przyjmowana jest jako wstępne odkształcenie warstwy zbrojenia.

Związki $M(N, \kappa)$ i $N(M, \epsilon)$ wyznacza się, rozpatrując kolejne poziome odkształceń w przekroju i wyznaczając obciążenie

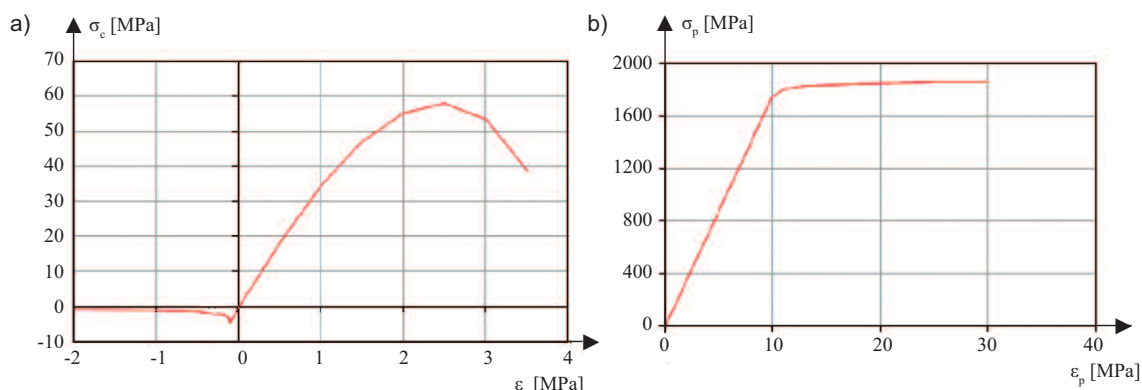


Fig. 5. Material models of concrete (a) and prestressing steel (b) used in the non-linear analysis of the prestressed column section

Rys. 5. Modele materiałowe betonu (a) i stali sprężającej (b) użyte w nieliniowej analizie przekroju słupa sprężonego

determining, using the iteration method, the load (longitudinal force and moment) balancing the internal forces in the cross-section. The section under consideration is subdivided in height into an arbitrary number of layers (Figure 4). The prestressing reinforcement is treated as a separate layer (or several layers) with a known position and a known cross-sectional area. Figure 5 shows the material characteristics of the concrete and prestressing steel adopted in the calculations. The effect of applying a prestressing force to a reinforced section is shown in Figures 6 and 7 as interaction diagrams. The forces are presented as relative $n = N/bh$ and $m = M/bh^2$.

nie (siłę podłużną i moment) równoważące siły wewnętrzne w przekroju metodą iteracji. Rozpatrywany przekrój zostaje podzielony na wysokości na dowolną liczbę warstw (rysunek 4). Zbrojenie sprężające traktowane jest jako odrębna warstwa (lub kilka warstw) o znanym położeniu i polu przekroju. Na rysunku 5 przedstawiono charakterystykę materiałową betonu i stali sprężającej przyjęte w obliczeniach. Wpływ przyłożenia siły sprężającej do przekroju zbrojonego przedstawiono na rysunkach 6 i 7 w postaci krzywych interakcji. Siły zaprezentowano w postaci względnej $n = N/bh$ oraz $m = M/bh^2$.

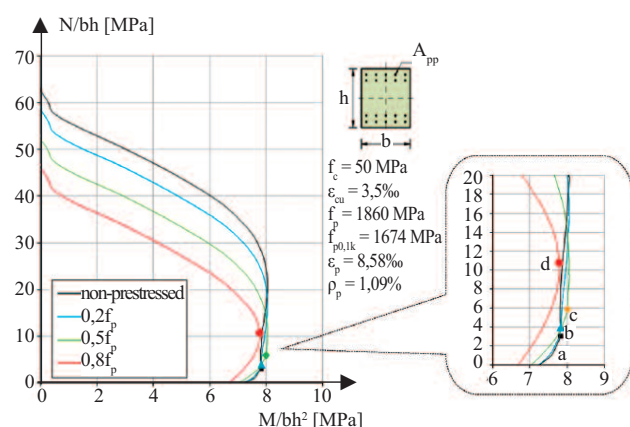
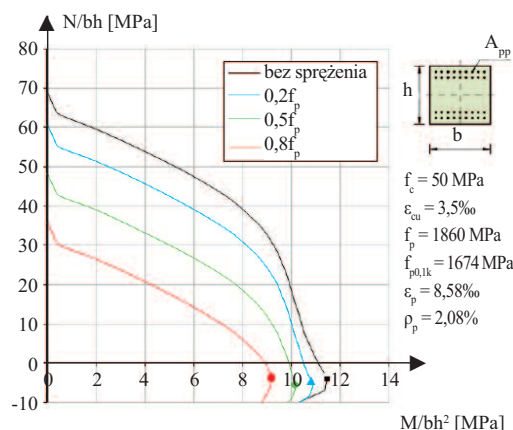


Fig. 6. The m-n interaction diagrams of cross-section prestressed with different prestressing levels at the reinforcement ratio of $\rho_p = 1.09\%$

Rys. 6. Krzywe m-n przekroju sprężonego różnymi poziomami sprężenia przy stopniu zbrojenia $\rho_p = 1.09\%$

The calculations were carried out for a rectangular section, reinforced symmetrically. The interaction curves were determined for the non-prestressed section and for three levels of prestressing – 20%, 50% and 80% of the tensile strength of the prestressing steel, respectively. Two levels of reinforcement were assumed – 1.09% and 2.08%. Table 1 summarises the values of forces and strains in concrete and prestressing reinforcement for the characteristic points of the curves – maximum axial load capacity, at the point of maximum bending moment occurrence and at the equilibrium point.

The limit value for the strain corresponding to the failure of the concrete in the compression zone was assumed to be



Rys. 7. Krzywe m-n przekroju sprężonego różnymi poziomami sprężenia przy stopniu zbrojenia $\rho_p = 2.08\%$

Fig. 7. The m-n interaction diagrams of cross-section prestressed with different prestressing levels at the reinforcement ratio of $\rho_p = 2.08\%$

Przeprowadzono obliczenia dotyczące przekroju prostokątnego, zbrojonego symetrycznie. Krzywe interakcji wyznaczono w przypadku przekroju niesprężonego oraz trzech poziomów sprężenia – odpowiednio 20, 50 i 80% wytrzymałości stali sprężającej na rozciąganie. Przyjęto dwa stopnie zbrojenia – 1.09 oraz 2.08%. W tabeli zestawiono wartości sił oraz odkształceń w betonie i zbrojeniu sprężającym w przypadku charakterystycznych punktów krzywych – maksymalnej nośności osiowej, w punkcie występowania maksymalnego momentu zginającego oraz w punkcie równowagi.

Wartość graniczną odkształcenia, odpowiadającego zniszczeniu betonu w strefie ściskanej, przyjęto na poziomie

Summary of concrete and reinforcement strain values for characteristic points of the interaction diagrams

Zestawienie odkształceń w betonie i zbrojeniu w charakterystycznych punktach krzywych interakcji

ρ_p [%]	σ_p			n_{max} ($m = 0$)				m_{max} ($n > 0$)				Punkt – η_{bal}				
	σ_p [MPa]	σ_p/f_p [-]	ε_{p0} [‰]	ε_c [‰]	$\varepsilon_{p'b}$ [‰]	$\varepsilon_{p't}$ [‰]	n_{max} [MPa]	$\varepsilon_{p'b}$ [‰]	$\varepsilon_{p't}$ [‰]	$n(m_{max})$ [MPa]	m_{max} [MPa]	sym- bol	$\varepsilon_{p'b}$ [‰]	$\varepsilon_{p't}$ [‰]	n [MPa]	m [MPa]
1,09	0	0	0	-2,5	-2,5	-2,5	-63,4	2,8	-2,8	-19,8	8,0	a	8,6	-2,1	-3,1	7,8
	372	0,2	1,9	-2,5	-0,59	-0,6	-59,3	4,7	-0,9	-15,7	8,0	b	8,6	-0,4	-2,9	7,8
	930	0,5	4,8	-2,5	2,2	2,2	-47,4	7,6	2	-9,5	8,0	c	8,6	2,1	-5,8	7,9
	1488	0,8	7,6	-2,5	5,1	5,1	-41,3	8,6	4,7	-10,4	7,8	d	8,6	4,7	-10,4	7,8
2,08	0	0	0	-2,5	-2,5	-2,5	-68,8	7,3	-2,3	0,0	11,0	a	8,6	-2,1	3,9	11,5
	372	0,2	1,9	-2,5	-0,59	-0,6	-60,5	6,9	-0,6	0,0	10,5	b	8,6	-0,4	5,9	10,8
	930	0,5	4,8	-2,5	2,3	2,3	-48,1	7,6	2	0,0	9,9	c	8,6	2,1	5,6	10,1
	1488	0,8	7,6	-2,5	5,1	5,1	-35,7	8,4	4,6	0,0	8,9	d	8,6	4,6	0,6	9,0

red colour – no yielding of tensile reinforcement/czerwony kolor – brak uplastycznienia zbrojenia rozciągane; green colour – yielding of tensile reinforcement/zielony kolor – uplastycznienie zbrojenia rozciągane; ε_c – strain in concrete at which maximum axial load capacity is reached/odkształcenie betonu, przy którym osiąga się maksymalną nośność osiową; $\varepsilon_{p'b}$ – strain in the reinforcement on the tensile side/odkształcenie w zbrojeniu po stronie rozciąganej; $\varepsilon_{p't}$ – strain in the reinforcement on the compression/less tensile side/odkształcenie w zbrojeniu po stronie ściskanej/mniej rozciąganej; n – relative compression capacity/względna nośność na ściskanie; m – relative flexural resistance/względna nośność na zginanie

$\varepsilon_{cu} = 3,5‰$. The strain at yielding of prestressing steel was assumed as for prestressing steel grade Y1860 – $\varepsilon_p = 8,58‰$. In general, the shape of the m-n interaction diagram of cross-sections reinforced with prestressing steel is similar to the m-n diagram of normal reinforced sections. Differences can be seen in the area of the maximum bending moment. The interaction curve of an uncompressed section reveals a distinct point 'a' of inflexion of the curve, located below the point of occurrence of the maximum bending moment. This is the so-called **balanced point** where the section resistance is reached due to both concrete failure and reinforcement steel yielding. It is also the limit point of the change of failure mechanism of the section. Below this point, the failure of the section is determined by the yielding of the reinforcement steel, while above this point, the failure due to crushing of the concrete (reaching the limit strains in the concrete) determines the load-bearing capacity. The specific inflexion at point 'a', is the result of the strength relations of the prestressing reinforcement and the concrete. In sections reinforced with high yield strength steel and thus higher deformations at yielding, the equilibrium point is shifted downwards as a result of the earlier exhaustion of the load-bearing capacity due to the concrete crushing. This means that the prestressing steel is only fully utilised to a narrow extent. Hence, the rather low position of this point – at $\eta_{bal} = 0,05$. In normal reinforced concrete sections reinforced with hot-rolled steel, the point of change of failure mechanism usually coincides with the point of occurrence of the maximum bending moment (the code [13] assumes that this point can be taken at $\eta_{bal} = 0,4$).

In prestressed sections, the presence of the prestressing force, which induces initial deformation in the tendons, accelerates steel yielding, resulting in the point of equilibrium failure moving upwards (points marked b', 'c' and 'd' in Figure 6 – m-n curves with prestressing of $0,2f_p$, $0,5f_p$ and $0,8f_p$ respectively). In these cases, as the prestressing force increases, the shape of the diagram returns to that known from normal reinforced concrete sections. It is worth noting that in the case of prestressing at $0,8f_p$ – the point 'd' coincides with

$\varepsilon_{cu} = 3,5‰$. Odształcenie przy uplastycznieniu stali sprężającej przyjęto jak stali sprężającej gatunku Y1860 – $\varepsilon_p = 8,58‰$. Kształt krzywej interakcji m-n przekrojów zbrojonych stalą sprężającą jest podobny do krzywych m-n zwykłych przekrojów zbrojonych. Różnice można dostrzec w obszarze maksymalnego momentu zginającego. Na krzywej interakcji przekroju niesprężonego ujawnia się wyraźny punkt „a” przegięcia krzywej, zlokalizowany poniżej punktu występowania maksymalnego momentu zginającego. Jest to tzw. **punkt równowagi**, gdzie nośność przekroju zostaje osiągnięta zarówno na skutek zniszczenia betonu, jak i uplastycznienia stali. Jest to także punkt graniczny zmiany mechanizmu zniszczenia przekroju. Poniżej tego punktu o zniszczeniu przekroju decyduje uplastycznienie zbrojenia, a powyżej nośność determinuje zniszczenie w wyniku zmiążdżenia betonu (osiągnięcie granicznych odkształceń w betonie). Swoiste przegięcie w punkcie „a” jest efektem relacji wytrzymałościowych zbrojenia sprężającego i betonu. W przekrojach zbrojonych stalą o wysokiej granicy plastyczności, a co za tym idzie z dużymi odkształceniami przy uplastycznieniu, punkt równowagi zostaje przesunięty w dół w wyniku wcześniejszego wyczerpywania się nośności betonu. Oznacza to, że stal sprężająca jest w pełni wykorzystana tylko w wąskim zakresie. Stąd dość niskie położenie tego punktu – na poziomie $\eta_{bal} = 0,05$. W zwykłych przekrojach żelbetowych zbrojonych stalą gorącowalcowaną punkt zmiany mechanizmu zniszczenia pokrywa się zazwyczaj z punktem występowania maksymalnego momentu zginającego (w normie [13] przyjęto, iż punkt ten można przyjmować na poziomie $\eta_{bal} = 0,4$).

W przekrojach sprężonych obecność siły sprężającej, która wywołuje wstępne odkształcenia w cięgnach, przyspiesza osiągnięcie granicy plastyczności przez stal, co skutkuje przesuwaniem się punktu zrównoważonego zniszczenia do góry (punkty oznaczone „b”, „c” i „d” na krzywych m-n ze sprężeniem odpowiednio $0,2f_p$, $0,5f_p$ oraz $0,8f_p$ – rysunek 6). W tych przypadkach kształt, wraz ze wzrostem naprężeń sprężających powraca do kształtu znanego z przekrojów żelbetowych. Należy podkreślić, że w przypadku sprężenia siłą sprężającą na pozio-

the point of occurrence of the maximum bending resistance, as in a normal reinforced concrete section. However, this point occurs at $\eta_{bal} = 0.2$. This means, of course, that the prestressing steel and the entire prestressed section will be better utilised. But the maximum moment already drops compared to the previous cases.

In sections with a higher degree of reinforcement (Figure 7), the maximum moment is reached in pure bending. In this case, the yielding of the reinforcement may not occur at all, and over the entire compression force range, the crushing of the concrete will determine the load-bearing capacity. The equilibrium points are in the interaction zone with the tensile force. Such a phenomenon in prestressed columns is not desirable due to the uneconomical use of reinforcement and the drastic reduction in section ductility.

Irrespective of the reinforcement ratio, in addition to correcting the position of the point of maximum bending moment, the position of the point of maximum axial load-bearing capacity changes and the whole curve shifts downwards. The degree of displacement depends on the introduced prestressing force and the reinforcement ratio. This is, of course, related to the effect of the prestressing force on the concrete in compression. The additional normal stresses from the prestressing accelerate the section to reach the limiting strain in the compressed concrete, resulting in a reduction in the load-bearing capacity of the section. This loss of compressive resistance makes the use of prestressed columns loaded mainly by normal force (with a small static eccentricity) unjustifiable.

The effect of prestressing on second-order effects in slender columns

For columns where, according to Eurocode 2 [13], the column slenderness λ is greater than the limiting slenderness λ_{lim} , second-order effects should be taken into account. These effects should be understood as an increase in the bending moments of the column due to the horizontal deformation of the column line. Second-order effects consist of two components [14]: the $P-\Delta$ effect and the $P-\delta$ effect. The $P-\Delta$ effect is related to the displacement of the column ends (global effect) and the $P-\delta$ effect to the local deformation of the column axis (deflection). Figure 8 shows a graphical interpretation of these components. In prestressed columns, certain specifics in the interaction of prestressing force and external effects become apparent. Namely, due to the technology of making the elements as pre-tensioned concrete, the prestressing force is transmitted to the concrete by the adhesion of strands that are consolidated with it. This means that the prestressing force always follows the deformation line of the column, in each section. It will therefore have no additional effects due to displacement of the column nodes or deflection. The influence on the total second-order eccentricity in the prestressed columns, as in the ordinary reinforced concrete columns, will be the elastic response of the column to the load and the reduction in stiffness and consequent increase in displacements and deflections due to concrete cracking and creep. Of these three factors, it should be noted that the prestressing force has

mie $0,8f_p$ – punkt „d” pokrywa się z punktem występowania maksymalnej nośności na zginanie, podobnie jak w zwykłym przekroju żelbetowym. Punkt ten występuje jednak na poziomie $\eta_{bal} = 0,2$, co oznacza, że stal sprężająca i cały przekrój sprężony będą lepiej wykorzystane, natomiast moment maksymalny zmniejsza się w porównaniu z poprzednimi przypadkami.

W przekrojach z większym stopniem zbrojenia (rysunek 7), maksymalny moment osiągnięty jest przy czystym zginaniu. W tym przypadku może nie dojść do uplastycznienia zbrojenia i w całym zakresie siły ściskającej o nośności będzie decydowało zmiążdżenie betonu. Punkty równowagi znajdują się w strefie interakcji z siłą rozciągającą. Takie zjawisko w słupach sprężonych nie jest wskazane ze względu na nieekonomiczne wykorzystanie zbrojenia oraz drastyczne obniżenie ciągliwości przekroju.

Niezależnie od stopnia zbrojenia, oprócz korekty położenia punktu maksymalnego momentu zginającego, zmianie ulega położenie punktu maksymalnej nośności osiowej, a cała krzywa ulega przesunięciu w dół. Stopień przesunięcia zależy od wprowadzonej siły sprężającej i stopnia zbrojenia. Jest to oczywiście związane z oddziaływaniem siły sprężającej na beton ściskany. Dodatkowe napężenie normalne od sprężenia przyspiesza osiągnięcie przez przekrój granicznych odkształceń w betonie ściskany, i powoduje zmniejszenie nośności granicznej przekroju. Taka utrata nośności na ściskanie sprawia, że stosowanie słupów sprężonych, obciążonych głównie siłą normalną (o niewielkim mimośrodku), nie jest uzasadnione.

Wpływ sprężenia na efekty II rzędu w słupach smukłych

W słupach, gdzie zgodnie z Eurokodem 2 [13] smukłość słupa λ jest większa niż smukłość graniczna λ_{lim} , należy uwzględniać efekty II rzędu, rozumiane jako zwiększenie momentów zginających słup ze względu na poziomą deformację linii słupa. Efekty II rzędu składają się z dwóch składników [14]: efektu $P-\Delta$ oraz efektu $P-\delta$. Efekt $P-\Delta$ jest związany z przemieszczeniem końców słupa (efekt globalny), a efekt $P-\delta$ z lokalną deformacją osi słupa (ugięciem). Na rysunku 8 przedstawiono graficzną interpretację tych składników. W słupach sprężonych ujawnia się pewna specyfika interakcji siły sprężającej oraz efektów zewnętrznych. Ze względu na technologię wykonania elementów jako strunobetonowych, siła sprężająca przekazywana jest na beton przez przyczepność wiotkich splotów z nim zsolidaryzowanych. To powoduje, że siła sprężająca podąża za linią odkształcenia słupa w każdym przekroju. Nie będzie ona zatem wywoływała dodatkowych efektów ze względu na przemieszczenie węzłów słupa bądź jego ugięcie. Wpływ na całkowity mimośród II rzędu w słupach sprężonych, podobnie jak w żelbetowych, będzie miała sprężysta odpowiedź słupa na obciążenie oraz redukcja sztywności i co za tym idzie zwiększenie się przemieszczeń oraz ugięć w wyniku zarysowania i pękania betonu. Wynika z tego, że siła sprężająca ma bezpośredni wpływ na zarysowanie elementu oraz pękanie. Sądzić zatem należy, że będzie wpływać na rozwój efektów II rzędu w słupach smukłych. W celu

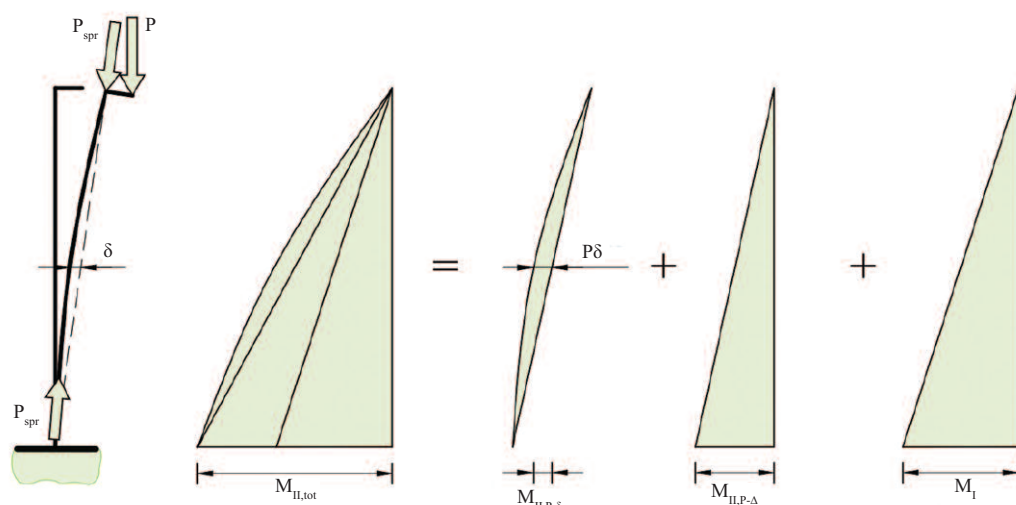


Fig. 8. Second-order effects in a prestressed column

Rys. 8. Efekty II rzędu w słupie sprężonym

a direct effect on the element's cracking and creep. It is therefore thought that it will influence the development of second-order effects in slender columns. In order to analyse this influence, a numerical analysis was carried out in OpenSees [15]. This is an open numerical environment for non-linear calculations.

Figure 9 shows the numerical model adopted for the calculations. The slender column is modelled using a static scheme commonly used in engineering applications for this type of precast column, i.e. as a member fixed in the foundation without bracing. This type of static scheme can be found in large-scale warehouses or industrial buildings where complete bracing of the structure against sway is difficult to achieve.

The column was divided into one-dimensional finite elements with three degrees of freedom at each end. „Nonlinear-BeamColumn” elements were used, taking into account material and geometric non-linearities, including second-order ($P-\Delta$) effects.

The stiffness at the integration points is determined from the cross-sectional $N-M-\kappa$ constitutive relation established from the cross-sectional layered model. The same non-linear material models presented earlier in the article were used to build this relationship. Two forces were applied to the column head. The first is a vertical force corresponding to the gravity load, i.e. the self-weight of the roof girder, roof layers, etc. To induce bending in the column, a horizontal force was applied to the head corresponding to the effect of wind transmitted to the column through the roof structure. Only short-term effects in the column were analysed. Figure 10

analizy tego wpływu przeprowadzono analizę numeryczną w programie OpenSees [15]. Jest to otwarte środowisko numeryczne do obliczeń nieliniowych.

Na rysunku 9 przedstawiono model numeryczny przyjęty do obliczeń. Słup smukły zamodelowano, przyjmując schemat powszechnie stosowany w zastosowaniach inżynierskich tego rodzaju słupów prefabrykowanych, czyli jako element zamocowany w fundamencie bez usztywnienia. Tego rodzaju schematy statyczne spotkać można w ustrojach wielkopowierzchniowych hal wysokiego składowania lub obiektach przemysłowych, gdzie całkowite usztywnienie konstrukcji przed przechyłem jest trudne do osiągnięcia. Słup został podzielony na jednowymiarowe elementy skończone z trzema stopniami swobody na każdym z końców. Wykorzystano elementy typu „nonlinearBeamColumn”, uwzględniające nieliniowość materiałową i geometryczną, w tym efekty II rzędu ($P-\Delta$).

Sztywność w punktach całkowania wyznaczana jest z przekrojowej zależności konstytutywnej $N-M-\kappa$ ustalonej na podstawie modelu warstwowego przekroju. Do budowy tej zależności wykorzystano nieliniowe modele materiałowe przedstawione wcześniej w artykule. Do głowicy słupa przyłożone zostały dwie siły. Pierwsza z nich to pionowa siła odpowiadająca obciążeniu grawitacyjnemu, tj. ciężarowi własnemu dźwigara dachowego, warstw dachowych itp. W celu wywołania zginania w słupie przyłożono do głowicy siłę poziomą odpowiadającą działaniu wiatru przekazywanego na słup przez ustrój dachowy. Analizowano wyłącznie efekty doraźne w słupie. Na rysunku 10 przedsta-

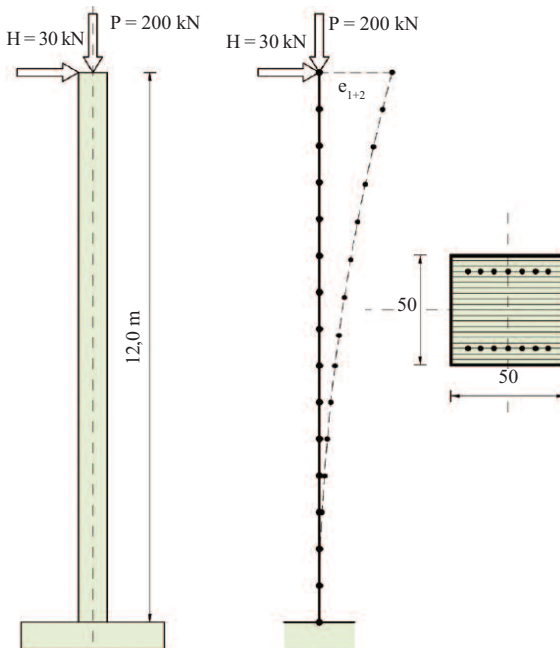


Fig. 9. Column geometry and its numerical model

Rys. 9. Geometria słupa oraz jego model numeryczny

shows the relationship of the total eccentricity and the horizontal force, and the relationship between the total moment in the section at the base of the column and the horizontal force. The relationships were determined for a reinforcement ratio of $\rho_p = 0,56\%$, for three levels of prestressing stress – 20, 35 and 80% of the tensile strength of the prestressing steel, and for comparison purposes non-prestressed section.

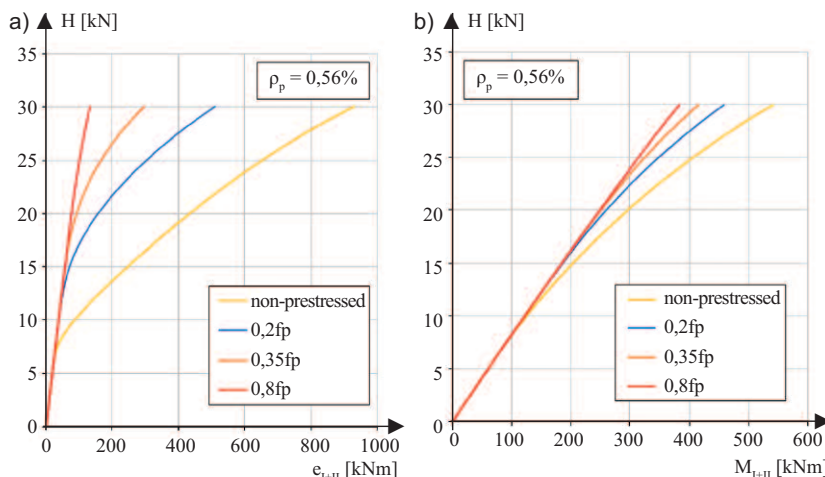


Fig. 10. Relationship of $H-e_{I+II}$ and $H-M_{I+II}$ for the column analysed with the reinforcement ratio $\rho = 0,56\%$

Rys. 10. Zależność $H-e_{I+II}$ oraz $H-M_{I+II}$ analizowanego słupa ze stopniem zbrojenia $\rho = 0,56\%$

As can be seen, the effect of the prestressing force and its value on the deflection line and second-order effects are visible. For the non-prestressed section, the total eccentricity is close to 940 mm, and the bending moment is 540 kNm. The $H-e_{I+II}$ diagram clearly shows the point of cracking and a strong loss of bending stiffness of the column at around $H = 7$ kN. A further increase in horizontal force causes a further loss of stiffness and an increase in column head displacement.

Prestressing of the column delays the cracking, ultimately resulting in a drastic improvement in the stiffness of the element. Compression to $0,2f_p$ results in a reduction in column head displacement of nearly half. Increasing the prestressing force results in a further reduction in eccentricity and, at a force of $0,8f_p$, is close to the solution as for a non-cracked element. Of course, the bending moments are also reduced.

Figure 11 shows diagrams of the same column, but reinforced with tendons of twice the area ($\rho_p = 1,11\%$). Increasing the degree of reinforcement stiffened the column, both without prestressing and with prestressing stress introduced. It is worth noting that, with a higher reinforcement ratio, the sensitivity of the column's behaviour to the presence of prestressing force is clearly greater. In this case, already at a prestressing force level of $0,35f_p$ (650 MPa), the load response of the column is close to that of a non-cracked element.

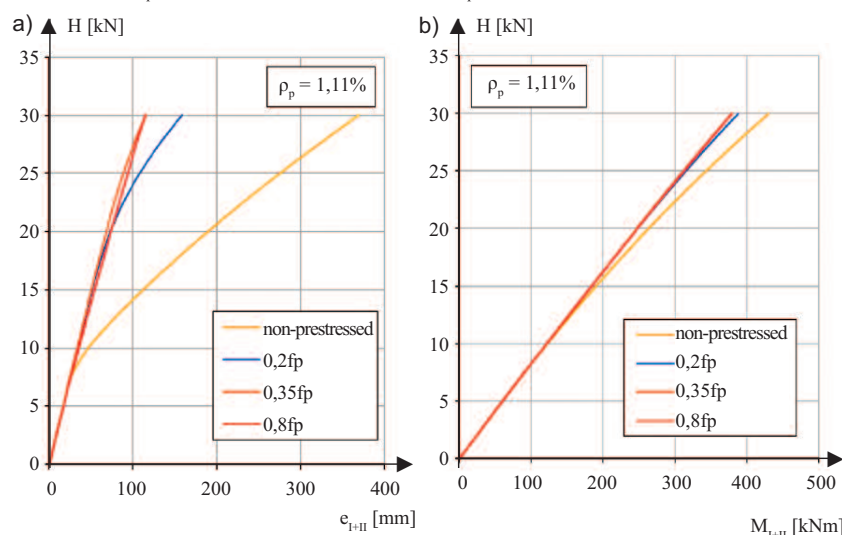


Fig. 11. Relationship of $H-e_{I+II}$ and $H-M_{I+II}$ of the column analysed with the reinforcement ratio $\rho = 1,11\%$

Rys. 11. Zależność $H-e_{I+II}$ oraz $H-M_{I+II}$ analizowanego słupa ze stopniem zbrojenia $\rho = 1,11\%$

wiono zależność mimośrod całkowitego od siły poziomej oraz zależność momentu całkowitego w przekroju u podstawy słupa od siły poziomej. Zależności wyznaczono przy stopniu zbrojenia $\rho_p = 0,56\%$ i trzech poziomach naprężenia sprężającego – 20, 35 oraz 80% wytrzymałości na rozciąganie stali sprężającej, oraz w celach porównawczych w przypadku przekroju niesprężonego.

Wpływ siły sprężającej i jej wielkości na linię ugięcia i efekty II rzędu są wyraźnie widoczne. W przypadku przekroju niesprężonego całkowity mimośród wynosi ok. 940 mm, a moment zginający 540 kNm. Na wykresie $H-e_{I+II}$ wyraźnie widać punkt zarysowania i silną utratę sztywności słupa na poziomie ok. $H = 7$ kN. Przyrost siły poziomej powoduje dalszą utratę sztywności i przyrost przemieszczeń głowicy słupa.

Sprężenie słupa sprawia, że następuje opóźnienie zarysowania, co skutkuje drastyczną poprawą sztywności elementu. Sprężenie do $0,2f_p$ powoduje zmniejszenie przemieszczeń głowicy słupa o prawie połowę, a zwiększanie siły sprężającej dalsze zmniejszenie mimośrod. Przy sile wynoszącej $0,8f_p$ jest bliskie rozwiązaniu, jak w przypadku elementu niezarysowanego. Oczywiście momenty zginające także ulegają zmniejszeniu.

Na rysunku 11 przedstawiono wykresy takiego samego słupa, ale zbrojonego cięgnami o dwa razy większym polu ($\rho_p = 1,11\%$). Zwiększenie stopnia zbrojenia usztywniło słup,

zarówno bez sprężenia, jak i z wprowadzonym naprężeniem sprężającym. Należy podkreślić, że przy dużym stopniu zbrojenia wrażliwość zachowania się słupa na obecność siły sprężającej jest wyraźnie większa niż przy małym. W tym przypadku już przy poziomie siły sprężającej $0,35f_p$ (650 MPa), odpowiedź słupa na obciążenie jest bliska elementowi niezarysowanemu.

Figure 12 shows the general relationship of total eccentricity and prestressing force for different reinforcement ratios and two column slendernesses – $\lambda = 166$ ($L_0 = 24,0$ m) and $\lambda = 83$ ($L_0 = 12,0$ m). As can be seen, as the prestressing force increases for both slendernesses, there is a rapid improvement in stiffness and a reduction in total eccentricity regardless of the degree of reinforcement. In

the less slender column ($\lambda = 83$), the effect of prestressing on the eccentricity is more pronounced already for low values of this stress. At a prestress level of about $0,15f_p$ (~ 300 MPa), the total eccentricity is close to the solution without cracking. Increasing the prestressing force further can only lead to overloading of the concrete and a loss of stiffness due to the introduction of the concrete into the non-linear deformation zone – this applies to the case with the highest reinforcement ratio.

In the more slender column ($\lambda = 166$) the reduction of eccentricity and improvement of stiffness is not as dynamic as in the more stocky column. For the highest reinforcement ratio, an almost linear relationship is achieved with a prestressing stress of $0,40f_p$, and for the lowest reinforcement ratio the stress must be close to $0,80f_p$. For the highest reinforcement ratio and the highest level of prestressing stress, stiffness degradation associated with non-linear deformation of the concrete also becomes apparent. This can also be seen in the relationship $H-e_{1+2}$ for a prestressing stress of $0,80f_p$ as a greater initial slope of this relationship (see Figure 9).

It should be emphasised that the analysis presented above does not take into account the influence of rheological (creep) effects on the deflection line and thus on second-order effects. Although in cantilevered columns the main load inducing bending is the wind, i.e. a short-term load, there will also be long-term bending moments under possible eccentric loading of the column head. In this case, creep must be taken into account in the analysis by adjusting the flexural stiffness of the column accordingly.

Design of prestressed columns according to Eurocode 2

According to [10], columns are not elements that qualify for so-called super prestressing, i.e. prestressing in such a way that the cracking of the element is considered as the ultimate limit state. It should therefore be considered that slender prestressed columns should be designed to prevent

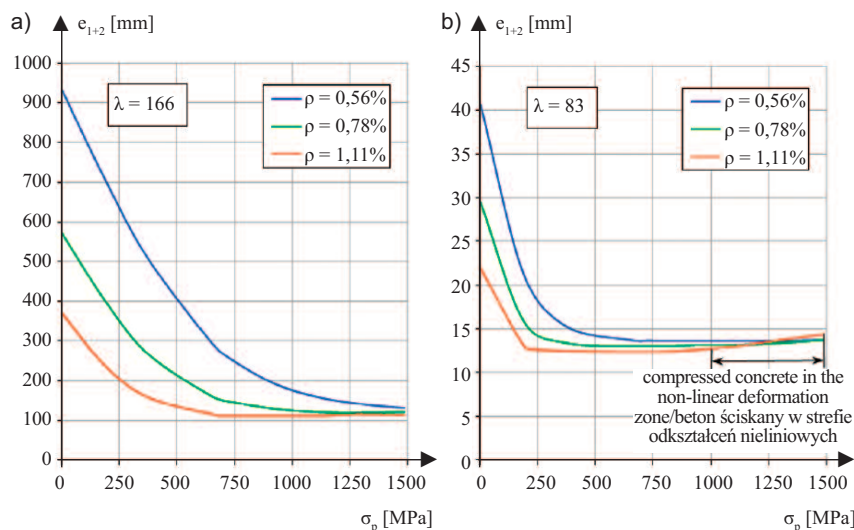


Fig. 12. Relationship of total eccentricity and prestress for two column slendernesses
Rys. 12. Zależność mimośrod całkowitego od naprężenia sprężającego w przypadku dwóch smukłości słupa

Na rysunku 12 przedstawiono uogólnione zależności mimośrodu od siły sprężającej w przypadku różnych stopni zbrojenia i dwóch smukłości słupa – $\lambda = 166$ ($L_0 = 24,0$ m) oraz $\lambda = 83$ ($L_0 = 12,0$ m). Wynika z nich, że w przypadku obu smukłości wraz ze wzrostem siły sprężającej następuje szybkie zwiększenie sztywności i redukcja mimośrodu całkowitego niezależnie od stopnia

zbrojenia. W słupie mniej smukłym ($\lambda = 83$) wpływ sprężenia na mimośród jest bardzo wyraźny już przy małych wartościach naprężenia. Przy poziomie sprężenia ok. $0,15f_p$ (~ 300 MPa) mimośród całkowity jest bliski rozwiązaniu bez zarysowania. Dalsze zwiększanie siły sprężającej może jedynie doprowadzić do przeciążenia betonu i utraty sztywności ze względu na wprowadzenie go w strefę odkształceń nieliniowych. Dotyczy to przypadku z największym stopniem zbrojenia.

W słupie bardziej smukłym ($\lambda = 166$) redukcja mimośrodu i poprawa sztywności nie jest tak dynamiczna jak w słupie bardziej krępym. W przypadku największego stopnia zbrojenia osiąga się prawie liniową zależność przy naprężeniu sprężającym rzędu $0,40f_p$, a przy najniższym stopniu zbrojenia naprężenia muszą być bliskie $0,80f_p$. W przypadku największego stopnia zbrojenia i największego poziomu naprężenia sprężającego ujawnia się także degradacja sztywności związana z odkształceniami nieliniowymi betonu. Widać to na zależności $H-e_{1+2}$ w przypadku naprężenia sprężającego $0,8f_p$ jako większe początkowe pochylenie tej zależności (rysunek 9).

Należy podkreślić, że przedstawiona analiza nie uwzględnia wpływu efektów reologicznych (pełzania) na linię ugięcia i tym samym na efekty II rzędu. Choć w słupach wspornikowych głównym obciążeniem wywołującym zginanie jest wiatr, czyli obciążenie krótkotrwałe, to przy ewentualnym mimośrodowym obciążeniu głowicy słupa będą także występowały długotrwałe momenty zginające. W takim przypadku w analizie należy wziąć pod uwagę pełzanie, odpowiednio korygując sztywność giętą słupa.

Projektowanie słupów sprężonych w świetle Eurokodu 2

Zgodnie z [10], słupy nie są elementami kwalifikującymi się do tzw. supersprężenia, tzn. do takiego sprężenia, gdzie zarysowanie elementu uznawane jest za przekroczenie stanu granicznego nośności. Należy zatem uznać, że smukłe słupy sprężone należy projektować, aby nie dopuścić do zarysowania je-

cracking only under a short-term load combination. This will result in an effective delay of cracking and much less displacement of the column head.

The European standard Eurocode 2 [13] allows the calculation of second-order effects by two simplified methods and a general method. Both simplified methods, the nominal stiffness method and the nominal curvature method, are not suitable for the design of prestressed columns, as they do not take into account the effect of prestressing on the reduction of column cracking. When designing prestressed columns, it is therefore necessary to use the general method, which will take into account geometric non-linearities and creep effects.

Since the prestressing of the column is selected in principle for the maximum prestressing stresses, taking into account the observations from the numerical analysis of second-order effects carried out earlier, we can conclude that at this level of prestressing, the column will behave under load as uncracked or partially cracked along its length. According to the update of Eurocode 2 [13], as a simplification, the global second-order effects can be analysed at the static calculation level by the elastic method. For uncracked prestressed structures, it can be assumed:

$$EI = E_{cd} I_c$$

where:

EI – flexural stiffness of the column;

E_{cd} – the design modulus of elasticity of concrete;

I_c – moment of inertia of the section.

In order to take into account rheological effects, the design modulus of elasticity including the creep coefficient should be used:

$$E_{cd,eff} = \frac{E_{cd}}{(1 + \varphi_{ef})}$$

where: φ – effective creep coefficient.

This approach will allow a more realistic assessment of the impact of 2nd order effects, as opposed to simplistic methods that would give significantly overestimated results.

Conclusions

Prestressed columns can be an effective alternative to the slender reinforced concrete columns commonly used in engineering practice. The introduction of prestressing force effectively delays cracking, which increases the stiffness of the column throughout the load range. This results in less displacement of the column head and its deflection line, and therefore, the second-order effects that are prevalent in slender columns are strongly reduced. In this type of element, where in extreme cases the 2nd order moments can be greater than the 1st order moments, such a limitation is invaluable.

The choice of prestressed columns makes it possible to design and construct very tall columns, while maintaining a reasonable cross-section (and hence self-weight) and an economical degree of reinforcement. Prestressed columns achieve slenderness in excess of $\lambda = 200$ (with a cantilevered static scheme), which can be difficult to design for reinforced concrete columns with an acceptable reinforcement ratio.

dyńie pod działaniem krótkotrwałej kombinacji obciążeń. To będzie powodować skuteczne opóźnienie zarysowania i znacznie mniejsze przemieszczenie głowicy słupa.

Norma europejska Eurokod 2 [13] dopuszcza obliczanie efektów II rzędu dwiema metodami uproszczonymi oraz generalną metodą ogólną. Obie metody uproszczone – metoda nominalnej sztywności i metoda nominalnej krzywizny nie są przystosowane do projektowania słupów sprężonych, gdyż nie uwzględniają wpływu sprężenia na redukcję zarysowania słupa. Projektując słupy sprężone, należy zatem stosować metodę ogólną, która uwzględni nieliniowości geometryczne oraz efekty pełzania.

W związku z tym, że sprężenie słupa dobiera się w zasadzie na maksymalne naprężenia sprężające, to biorąc pod uwagę obserwacje z wcześniej przeprowadzonej analizy numerycznej efektów II rzędu, możemy uznać, że przy takim poziomie sprężenia słup będzie się zachowywał pod obciążeniem jako niezarysowany lub zarysowany częściowo na długości. Zgodnie z aktualizacją Eurokodu 2 [13], efekty II rzędu możemy analizować na poziomie obliczeń statycznych metodą sprężystą. W przypadku niezarysowanych konstrukcji sprężonych można założyć:

$$EI = E_{cd} I_c$$

gdzie:

EI – sztywność giętna słupa;

E_{cd} – obliczeniowy moduł sprężystości betonu;

I_c – moment bezwładności przekroju.

Aby uwzględnić efekty reologiczne, należy zastosować obliczeniowy moduł sprężystości z uwzględnieniem współczynnika pełzania:

$$E_{cd,eff} = \frac{E_{cd}}{(1 + \varphi_{ef})}$$

gdzie: φ – efektywny współczynnik pełzania.

Takie podejście umożliwi bardziej realną ocenę wpływu efektów II rzędu, w przeciwieństwie do metod uproszczonych, które dałyby znacznie zawyżone wyniki.

Wnioski

Słupy sprężone mogą być alternatywą smukłych słupów żelbetowych, powszechnie stosowanych w praktyce inżynierskiej. Wprowadzenie siły sprężającej skutecznie opóźnia zarysowanie, co zwiększa sztywność słupa w całym zakresie obciążenia. To powoduje, że przemieszczenia głowicy słupa oraz jego linii ugięcia są mniejsze, a co za tym idzie efekty II rzędu, które dominują w słupach smukłych, są silnie ograniczone. W tego typu elementach, gdzie w skrajnych przypadkach momenty II rzędu mogą być większe niż momenty I rzędu, takie ograniczenie jest nieocenione.

Słupy sprężone można zaprojektować i wykonać jako słupy bardzo wysokie, z utrzymaniem rozsądnego przekroju (a co za tym idzie ciężaru własnego) oraz ekonomicznego stopnia zbrojenia. Słupy sprężone osiągają smukłość przekraczającą $\lambda = 200$ (przy wspornikowym schemacie statycznym), co w przypadku słupów żelbetowych może okazać się trudne do zaprojektowania przy akceptowalnym wskaźniku zużycia

Although prestressing force is an additional load for column sections, for slender columns where bending is the predominant load, this interaction is beneficial.

The design of prestressed columns should always be carried out taking into account the prestressing force and its immediate and delayed losses. As simplified methods are not suited to the design of this type of member, it is recommended to use the general method currently widely available in engineering software.

Further directions for development in this area include the development of a simplified method, e.g. a modification of the nominal curvature method, allowing simplified evaluation of second-order effects in this type of element without the need for sophisticated software.

An equally important research direction is the behaviour of such elements under fire conditions. There is a lack of design guidelines for this aspect in the literature and standards.

zbrojenia. Siła sprężająca jest wprowadzie dodatkowym obciążeniem przekrojów słupa, ale w przypadku słupów smukłych, w których dominującym obciążeniem jest zginanie, ma ono charakter korzystny.

Projektowanie słupów sprężonych należy zawsze prowadzić z uwzględnieniem siły sprężającej oraz jej strat doraźnych oraz opóźnionych. W związku z tym, że metody uproszczone nie są przystosowane do projektowania tego typu elementów, rekomenduje się stosowanie metody ogólnej obecnie powszechnie dostępnej w oprogramowaniu inżynierskim.

W ramach dalszych badań należy opracować metodę uproszczoną, np. przez modyfikację metody nominalnej krzywizny, umożliwiającą uproszczoną ocenę efektów II rzędu w tego rodzaju elementach bez potrzeby używania zaawansowanego oprogramowania. Równie ważnym kierunkiem badań jest zachowanie się tego typu elementów w warunkach pożaru.

Received: 06.03.2025
Revised: 07.05.2025
Published: 23.10.2025

Artykuł wpłynął do redakcji: 06.03.2025 r.
Otrzymano poprawiony po recenzjach: 07.05.2025 r.
Opublikowano: 23.10.2025 r.

Literature

- [1] Itaya R. Design and Uses of Prestressed Concrete Columns. PCI Journal. 1965. DOI: <https://doi.org/10.15554/pci.06011965.69.76>.
- [2] Rodriguez-Gutierrez JA, Dario Aristizabal-Ochoa J. Reinforced, Partially, and Fully Prestressed Slender Concrete Columns Under Biaxial Bending and Axial Load. Journal of Structural Engineering. 2001; t. 127, nr 7.
- [3] Zia P, Guillermo EC. Combined Bending and Axial Load in Prestressed Concrete Columns. PCI Journal. 1967; t. 12, nr 3, s. 52–59.
- [4] Durrani AJ, Elias HE. Confinement of Prestressed Concrete Columns. Journal – Prestressed Concrete Institute. 1988; t. 33, nr 3, s. 122–141.
- [5] Mander JB, Priestley MJN, Park R. Theoretical Stress-Strain Model For Confined Concrete. Journal of Structural Engineering. 1988; t. 114, nr 8.
- [6] Zerbe L, Vieira D, Belarbi A, Senouci A. Uniaxial compressive behavior of circular concrete columns actively confined with Fe-SMA strips. Eng Struct. 2022. DOI: [10.1016/j.engstruct.2022.113878](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.113878).
- [7] Han T, Dong Z, Zhu H, Wu G, Zhao X. Compression behavior of concrete columns combinedly confined by FRP externally wrapped Fe-SMA strips. Eng Struct. 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116754>.
- [8] Abdelrahman K. Performance of Eccentrically Loaded Reinforced Concrete Columns Confined with Shape Memory Alloy Wires. University of Calgary, Calgary, 2017.

- [9] Kluz T. Strunobetonowe wkładki deskowe. Warszawa: Budownictwo i Architektura, 1955.
- [10] Ajdukiewicz A, Mames J. Konstrukcje z betonu sprężonego. Kraków: Stowarzyszenie Producentów Cementu, 2008.
- [11] Czekwianianc A, Kamińska M. Metoda nieliniowej analizy żelbetowych elementów prętowych. PAN. KILiW, 1993.
- [12] Kotynia R, Kaminska M. Ductility and failure mode of RC Beams Strengthened for Flexure with CFRP/Odształcalność i sposób zniszczenia żelbetowych belek wzmocnionych na zginanie materiałami CFRP, t. 13. Łódź: 3 Department of Concrete Structures Technical University of Lodz, Poland, 2003.
- [13] PN EN 1992-1-1 Eurocode 2: Projektowanie konstrukcji z betonu – Część 1-1: Reguły ogólne oraz reguły dla budynków, mostów i konstrukcji inżynierskich. Warszawa: PKN, 2024.
- [14] Burgos RB, Silva LE. Evaluation of the P-Δ (P-Delta) effect in columns and frames using the two-cycle method based on the solution of the beam-column differential equation. MethodsX. 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mex.2023.102248>.
- [15] Mazzoni S, McKenna F, Scott, MH, Fenves GL, Iii A. Open System for Earthquake Engineering Simulation (OpenSees) OpenSees Command Language Manual. 2006.