

mgr inż. Natalia Bróż<sup>1)</sup>  
 ORCID: 0000-0002-2719-7566  
 dr hab. inż. Piotr Nazarko, prof. PRz<sup>1)</sup>  
 ORCID: 0000-0002-6135-2486  
 mgr inż. arch. Anna Prokop<sup>1)</sup>  
 ORCID: 0000-0003-2666-1002  
 dr inż. arch. Rafał Licholai<sup>1)</sup>  
 ORCID: 0000-0002-0904-7812

# Variant analysis of the spatial bearing capacity of a lattice girder the load-bearing structure of the membrane roof of the amphitheater

## *Wariantowa analiza nośności przestrzennego dźwigara kratowego konstrukcji nośnej membranowego przekrycia amfiteatru*

DOI: 10.15199/33.2025.07.14

**Abstract.** The article presents an analysis of the influence of selected geometric parameters on stress distribution, stiffness, and material consumption in a spatial arched truss girder. The obtained results demonstrated that the choice of the cross-sectional rotation angle led to variations in axial forces of up to 48% in tension and 60% in compression. The analysis of the influence of the cross-sectional rotation angle, with the girder inclined at 30° from the vertical, enabled a more in-depth understanding of the structural behavior and had provided new insights in the field.

**Keywords:** spatial truss girder; parametric modeling; load-bearing capacity analysis; amphitheater.

**Streszczenie.** Artykuł przedstawia analizę wpływu wybranych parametrów geometrycznych na wyężenie, sztywność oraz zużycie materiału w przestrzennym łukowym dźwigarze kratownicowym. Uzyskane wyniki pokazały, że dobór kąta obrotu przekroju poprzecznego doprowadził do zmiany sił osiowych o 48% przy rozciąganiu i o 60% przy ściskaniu. Analiza wpływu kąta obrotu przekroju poprzecznego przy odchyleniu dźwigara od pionu o 30° pozwoliła na pogłębioną analizę pracy konstrukcji i dostarczyła nową wiedzę w tym zakresie.

**Słowa kluczowe:** przestrzenny dźwigar kratownicowy; modelowanie parametryczne; analiza nośności; amfiteatr.

Tensile structures are commonly used in multifunctional facilities, exhibition pavilions, bridges (suspension and cable-stayed), masts and chimneys with guy wires, railway stations, ski lifts, and cable cars [1]. They are increasingly being employed in combination with membrane roof coverings [2]. In recent years, with the advancement of technical fabric manufacturing technologies, these materials have gained importance as modern, economical, durable, and resilient textile solutions. They are used as membrane coverings in structures such as stadiums, airports, amphitheatres, halls, parking lots, restaurants, bus stops, entrance canopies, swimming pools, and tennis courts [3, 4]. The main advantage of tensile membrane roofs lies in their lightweight nature and ease of transport. The cables can be lifted and attached to end supports using cranes or winches, without the need for scaffolding. The installation time of a membrane structure is significantly shorter compared to traditional construction methods [5]. The design of such roofs assumes the presence of tensile forces in the cables and membrane; however, this can result in substantial loads on the foundations and anchoring blocks, as well as execution challenges related to proper structural stiffening, the introduction of prestress, and the anchoring of the cables [3, 4].

The first stage in the design of a membrane roof is determining its shape. Flat membrane structures are rarely

Konstrukcje cięgnowe są powszechnie stosowane m.in. w obiektach wielofunkcyjnych, pawilonach wystawowych, mostach (wiszących i podwieszonych), masztach i kominach z odciągami, dworcach kolejowych, wyciągach narciarskich oraz kolejkach linowych [1]. Coraz częściej wykorzystuje się je w połączeniu z membranowymi pokryciami dachowymi [2]. W ostatnich latach, wraz z modernizacją technologii produkcji, wzrosło znaczenie tkanin technicznych jako nowoczesnych, ekonomicznych, trwałych i odpornych materiałów tekstylnych. Stosowane są jako zadaszenia membranowe stadionów, lotnisk, amfiteatrów, hal, parkingów, restauracji, przystanków autobusowych, wejść, basenów, kortów tenisowych [3, 4]. Główną zaletą zadaszeń cięgnowo-membranowych jest ich lekkość i łatwość transportu. Ciężna mogą być podnoszone i mocowane do podpór końcowych za pomocą dźwigów lub wyciągarek, bez konieczności stosowania rusztowań. Czas montażu konstrukcji membranowej jest znacznie krótszy niż konstrukcji tradycyjnych [5]. Kształtowanie takich dachów zakłada wyściepowanie sił rozciągających w ciężnach i membranie, które mogą prowadzić do dużych obciążeń fundamentów i bloków kotwiących oraz trudności wykonawczych związanych z odpowiednim usztywnieniem konstrukcji, wprowadzeniem wstępnego naprężenia i zakotwieniem ciężnych [3, 4].

Pierwszym etapem projektowania zadaszenia membranowego jest wyznaczenie jego kształtu. Płaskie konstrukcje membranowe są rzadko spotykane i stosowane jedynie

<sup>1)</sup> Politechnika Rzeszowska, Wydział Budownictwa, Inżynierii Środowiska i Architektury

<sup>\*)</sup> Correspondence address: n.broz@prz.edu.pl

encountered and are used only for small-scale coverings. Larger roofs are typically shaped based on surfaces with double curvature or opposite (anticlastic) curvature [6]. Membrane coverings can be stretched over rigid frames, walls, masts, trusses, or cables [3]. The most commonly used forms include saddle-shaped surfaces, conical forms, and membrane roofs supported by an arch acting as a ridge element [7].

The shape of the membrane surface is determined by architectural requirements and the analysis of internal forces. A loose membrane, once prestressed, is capable of carrying tensile forces. The magnitude of these forces depends on the geometry, external loads, and the form of the surface. During the form-finding stage, the forces resulting from prestressing are taken into account [3, 8]. The determination of the stretched membrane's shape is currently performed using computational methods and software tools. These programs are based on the finite element method (FEM), taking also into consideration the geometric non-linearity of the material. They enable simulation of membrane behaviour under loading conditions. Examples of software used for the analysis of textile membranes include EASY Technet GMBH, RFEM with the RF-FORM-FINDING module, and SOFISTIK [3].

The creation of parametric geometric models supports both the form-finding process in line with the architect's design intent and the structural analysis of cable-bar systems [8]. Shi et al. [9] proposed an optimization method that serves both shape determination and stiffness maximization. They confirmed that, in the case of cable – membrane structures, better results are achieved by optimizing the shape and increasing stiffness compared to membrane structures without cable reinforcement.

This study analyses the performance of a steel structure based on a real-life facility located in Stężyca. In this case, the amphitheatre roof is supported by two inclined truss arches with a triangular cross-section. The chords of the truss arches are fixed in the foundation [4]. This solution made it possible to eliminate cable stays and bracing elements. The tensioned membrane (a fabric coated with a PVC layer [8, 10]) forms a saddle-shaped surface. The span of the truss structure is 22.4 meters.

## Model Description and Assumptions

The computational model was developed based on the shape, dimensions, and materials used in the actual structure. A distinctive feature of the roof is the system of cables integrated into the membrane. Proper tensioning of both the cables and the membrane allows the desired roof form to be achieved. To determine the tensile forces and the shape of the prestressed membrane, the RFEM software was used in combination with the Form-Finding module.

The analysis of the truss arch's performance considered **three selected factors influencing the magnitude of internal forces and material consumption**:

- the effect of the rotation angle of the girder's cross-section;
- the selection of profiles used in the girder elements and the spacing of its chords;
- the determination of the number of segments in the girder (vertical members and diagonals).

jako niewielkie zadaszenia. Większe dachy formowane są na podstawie powierzchni o podwójnej krzywiznie lub o krzywiznie przeciwnej (antyklasycznej) [6]. Pokrycia membranowe mogą być rozpięte na sztywnych ramach, ścianach, masztach, kratownicach lub naciągach [3]. Najczęściej spotykane formy to powierzchnie siodłowe, stożkowe oraz membranowe oparte na łuku pełniącym funkcję kalenicy [7].

Kształt powłoki membranowej zależy od założeń architektonicznych oraz analizy sił wewnętrznych. Luźna membrana po wstępnym naprężeniu może przenosić siły rozciągające, których wartości zależą od wymiarów, obciążeń zewnętrznych oraz kształtu powłoki. Na etapie kształtowania formy przekrycia uwzględniane są siły wynikające z wstępnego naprężenia [3, 8]. Wyznaczanie kształtu rozciągniętej membrany jest obecnie realizowane za pomocą metod i programów komputerowych, wykorzystujących metodę elementów skończonych (MES) i uwzględniających geometryczną nieliniowość materiału. Umożliwiają one symulację zachowania powłok pod wpływem obciążeń. Przykładami programów stosowanych do analizy powłok tekstylnych są [3]: EASY Technet GMBH, RFEM z modulem RF-FORM-FINDING, SOFISTIK.

Tworzenie parametrycznych modeli geometrycznych wspomaga zarówno znalezienie formy spełniającej założenia architekta, jak i przeprowadzenie analizy pracy konstrukcji ciągnowo-prętowych [8]. Shi i in. [9] zaproponowali metodę optymalizacji, służącą do wyznaczania kształtu i maksymalizacji sztywności. Potwierdzili, że lepsze efekty daje projektowanie optymalnego kształtu i większej sztywności konstrukcji ciągnowo-membranowych niż konstrukcji membranowych pozbawionych ciągów.

W artykule przeanalizowano pracę konstrukcji stalowej, wznosząc się na obiekcie znajdującym się w Stężycy. Zadaszenie amfiteatru oparto na dwóch pochylonych łukach kratowych o przekroju trójkątnym. Krawężniki łuku kratowniczowego zostały utwierdzone w fundamencie [4]. Rozwiązanie to pozwoliło na wyeliminowanie odciągów linowych oraz zastrzałów. Naprężona membrana (tkanina pokryta powłoką PVC [8, 10]) ma kształt powierzchni siodłowej. Rozpiętość kratownicy wynosi 22,4 m.

## Opis modelu i przyjęte założenia

Model obliczeniowy został opracowany na podstawie kształtu, wymiarów oraz materiałów zastosowanych w rzeczywistej konstrukcji. Charakterystycznym elementem zadaszenia są liny wbudowane w membranę. Odpowiednie naprężenie lin i membrany umożliwia uzyskanie żądanej formy zadaszenia. Do wyznaczenia sił rozciągających oraz kształtu naprężonej membrany wykorzystano oprogramowanie RFEM wraz z modulem Form-Finding.

W analizie pracy łuku kratowniczowego uwzględniono **trzy wybrane czynniki wpływające na wielkość sił przekrojowych oraz zużycie materiału**:

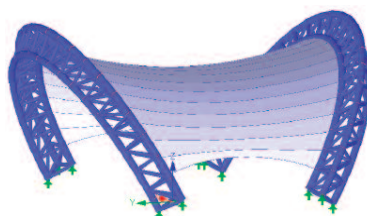
- wpływ kąta obrotu przekroju poprzecznego dźwigara;
- dobór kształtowników w elementach dźwigara oraz rozstawu jego krawężników;
- określenie liczby segmentów w dźwigarze (słupków i skratowań).

For simplification purposes, it was assumed that the inclination angle of the girders from the vertical plane is a constant value, predetermined by the architect. In this case only bracing system was studied (the N-type). The structural model created in RFEM was used to determine the shape of the prestressed membrane and the resulting forces in the cables, as well as for dimensioning the cross-sections of individual elements of the analyzed structure in accordance with applicable design standards [11]. A crucial element in achieving the intended objective was the implementation of an algorithm for parametric modeling of the girder geometry. For this purpose, the Dynamo environment – integrated with Autodesk Robot Structural Analysis – was employed. The developed script enabled automated generation of the girder geometry, including the definition of support conditions and assignment of cross-sectional properties to individual members.

Figure 1 presents the model used to define individual load cases, their combinations, and to perform the structural and strength analysis. Based on this, preliminary selection of steel (S275) profiles was made: RO 457 × 25 mm for the chords and RO 219.1 × 6.3 mm for the posts and diagonals.

Steel cables of grade S450 were used, with cross-sections defined as RD20. A constant prestressing force of 2 kN was applied to each cable. For the outermost cables, a fixed-length condition was imposed to achieve the desired membrane geometry. The generated membrane surface was assigned material properties corresponding to a two-dimensional orthotropic elastic material.

The structural analysis considered the following load cases: self-weight, snow load, wind load (both parallel and perpendicular to the main axis of the structure), and live loads. These loads were defined based on the structure's location, intended use, and the relevant design standards [12 ÷ 15]. They form the basis for the structural and strength analyses presented in this study



**Fig. 1. Obtained form of the cable-membrane roofing**

*Rys. 1. Uzyskana forma pokrycia dachowego w postaci membrany kablowej*

W celu uproszczenia przyjęto, że kąt odchylenia dźwigarów od pionu jest wielkością stałą, z góry określoną przez architekta, podobnie jak układ stężeń (w tym przypadku typu N). Utworzony model konstrukcji w RFEM posłużył do wyznaczenia kształtu naprężonej membrany oraz wynikających z tego sił wciągach i wymiarowania przekrojów poszczególnych elementów analizowanej konstrukcji zgodnie z obowiązującymi normami [11]. Kluczową rolę w realizacji zamierzonego zadania odegrał algorytm umożliwiający parametryczne modelowanie geometrii dźwigara. W tym celu wykorzystano program Dynamo, współpracujący z programem Robot (Autodesk). Opracowany algorytm pozwolił m.in. na generowanie geometrii dźwigara z przypisanymi podparami oraz przekrojami prętów.

Na rysunku 1 przedstawiono model, który posłużył do definiowania poszczególnych oddziaływań, ich kombinacji oraz analizy statyczno-wytrzymałościowej. Na tej podstawie wstępnie dobrano profile prętów ze stali S275: RO 457 × 25 mm w przypadku pasów oraz RO 219,1 × 6,3 mm w przypadku słupków i krzyżulców.

Cięgnom przypisano stal klasy S450, a ich przekroje przyjęto jako RD20. Na cięgna nałożono stałą siłę wstępnego naciągu o wartości 2 kN. W przypadku cięgien skrajnych wprowadzono warunek stałej długości, aby uzyskać pożądaną kształt membrany. Utworzonej powierzchni membrany przypisano odpowiednie właściwości materiałowe (sprężysty materiał ortotropowy 2D).

W przeprowadzonej analizie statycznej uwzględniono następujące obciążenia: ciężar własny; obciążenie śniegiem; obciążenie wiatrem (równoległe i prostopadłe do osi konstrukcji) oraz obciążenia użytkowe, określone na podstawie lokalizacji, przeznaczenia analizowanego obiektu oraz obowiązujących norm [12 ÷ 15]. Czynniki te stanowią podstawę przedstawionych wyników obliczeń statycznych i wytrzymałościowych.

## Analysis of the Load-Bearing Capacity of the Truss Girder

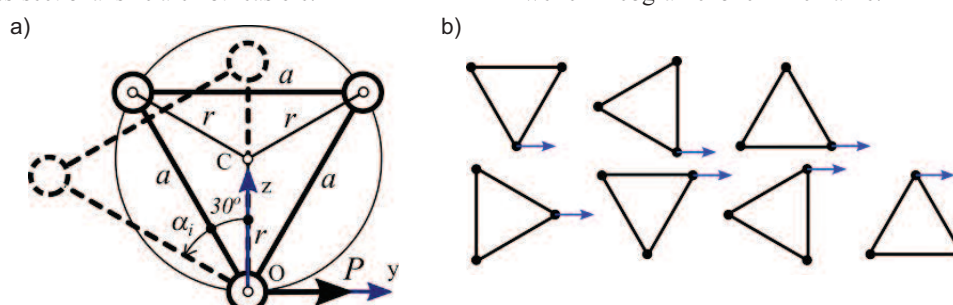
The load-bearing capacity and stiffness of the analyzed truss girder depend, among other factors, on the selected cross-sections of the bars, the spacing of the chords, and the orientation of the girder's cross-section relative to the applied load (see Figure 2a). As a starting point for more advanced analyses, the moment of inertia  $I_z$  of the girder's cross-section was examined with respect to two selected geometric parameters. The calculations used well-known geometric formulas related to the properties of plane figures [16]. The aim of this analysis was to determine the rotation angle  $\alpha$  of the girder's cross-section that, for a given loading configuration, would result in the highest stiffness of the structure. The girder's cross-section forms an equilateral triangle, with chords located at the triangle's vertices and made of circular hollow sections. Based on this geometry, the moment of inertia of the girder cross-section was calculated for various rotation angles ranging from 0° to 180°. Selected positions of the cross-

## Wariantowa analiza nośności dźwigara kratowniczowego

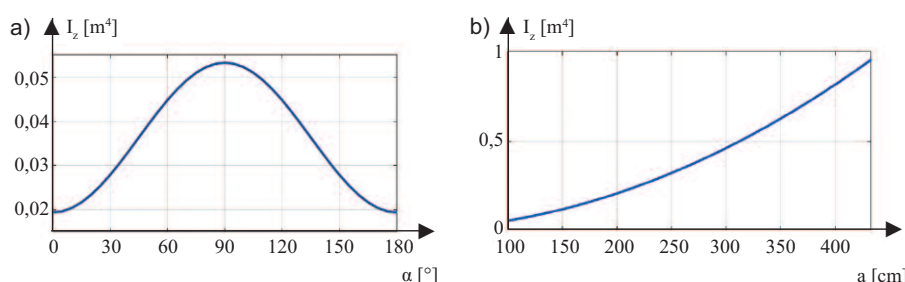
Nośność i sztywność analizowanego dźwigara kratowniczowego zależą m.in. od przekroju poprzecznego prętów, rozstawu krawężników i orientacji przekroju dźwigara względem przyłożonego obciążenia (rysunek 2a). Jako punkt wyjścia do bardziej zaawansowanych analiz zbadano moment bezwładności  $I_z$  przekroju poprzecznego dźwigara w odniesieniu do dwóch wybranych parametrów geometrycznych. W obliczeniach wykorzystano znane zależności związane z geometrią figur płaskich [16]. Celem tej analizy było wyznaczenie kąta obrotu przekroju poprzecznego dźwigara  $\alpha$ , który przy zadanym schemacie obciążenia pozwoli uzyskać największą sztywność analizowanej konstrukcji. Przekrój poprzeczny dźwigara tworzy trójkąt równoboczny, w którego wierzchołkach znajdują się krawężniki wykonane z rur okrągłych. Na tej podstawie obliczono moment bezwładności przekroju dźwigara w przypadku różnych kątów jego obrotu od 0° do 180°. Wybrane położenia przekroju poprzecznego wraz z kierunkami działania obciążeń od cięgien przedstawiono na rysunku 2b. Na

section, along with the directions of cable-induced forces, are illustrated in Figure 2b. The results of the calculations are shown in Figure 3. The relationship is nonlinear, and the maximum occurs at an angle of  $\alpha = 90^\circ$ , where the moment of inertia for a chord spacing of  $a = 100$  cm reaches a value of  $0.053$  m<sup>4</sup>.

The second parameter influencing changes in the moment of inertia is the spacing of the chords. For the selected angle (i.e.,  $90^\circ$ ), analogous calculations were carried out, with the results presented in Fig. 2b. It can be observed that as the dimensions of the girder's cross-section increase, its moment of inertia also increases, and in a nonlinear manner. It should be noted, however, that increasing the cross-sectional dimensions also affects the overall weight of the structure (since the truss members become longer), as well as its visual appearance. For this reason, unlimited increases in cross-sectional size are not feasible.



**Fig. 2: Girder cross-section diagram and adopted markings (a) and selected cross-section positions:  $0^\circ$ ;  $30^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $120^\circ$ ;  $150^\circ$ ;  $180^\circ$  (b)**  
 Rys. 2. Schemat przekroju poprzecznego dźwigara i przyjęte oznaczenia (a) oraz wybrane położenie przekroju:  $0^\circ$ ;  $30^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $120^\circ$ ;  $150^\circ$ ;  $180^\circ$  (b)



**Fig. 3. Moment of inertia  $I_z$  of the girder depending on: a) angle of rotation  $\alpha$  (with a chord spacing  $a = 100$  cm); b) chord spacing  $a = \{100, 110, \dots, 300\}$  cm**

Rys. 3. Moment bezwładności  $I_z$  dźwigara w zależności od zmiany: a) kąta obrotu przekroju  $\alpha$  (przy rozstawie krawężników  $r = 100$  cm); b) rozstawu krawężników  $a = \{100, 110, \dots, 300\}$  cm

## Stiffness Analysis of the System and Variations in Internal Forces

Based on the obtained values of the moment of inertia of the cross-section, it was assumed that the configuration used for result verification in the Robot software would have a chord spacing of  $r = 100$  cm (where  $r$  is the radius of the circle circumscribing the girder's cross-section, i. e., an equilateral triangle). For simplification, the loading was assumed to consist solely of horizontal forces of 2 kN (representing the prestressing force in the cables), applied to the nodes of one of the chords. The initially selected profiles were adopted: RO 457  $\times$  25 for the chords and RO 219.1  $\times$  6.3 for the bracing elements. Using the parametric model created in Dynamo, successive structural configurations were imported with varying rotation angles of the girder's cross-section. The structural type in Robot was defined as a spatial truss. As a result, all bar connections were

podstawie przeprowadzonych obliczeń otrzymano zależność przedstawioną na rysunku 3. Charakter zmian jest nieliniowy, a ekstremum występuje przy kącie  $\alpha = 90^\circ$ , gdzie moment bezwładności w przypadku rozstawu pasów  $a = 100$  cm osiąga wartość  $0,053$  m<sup>4</sup>.

Drugim parametrem wpływającym na zmianę momentu bezwładności jest rozstaw pasów. W przypadku wybranego kąta  $90^\circ$  wykonano analogiczne obliczenia, których wynik przedstawiono na rysunku 2b. Wraz ze zwiększeniem wymiarów przekroju poprzecznego dźwigara, jego moment bezwładności również zwiększa się w sposób nieliniowy. Należy pamiętać, że zwiększanie wymiarów przekroju wpływa na ciężar całej konstrukcji (wydłużeniu ulegają wówczas elementy kratownicy) oraz efekt wizualny i dlatego nie jest możliwe ich nieograniczone zmienianie.

## Analiza sztywności układu oraz zmiany sił wewnętrznych

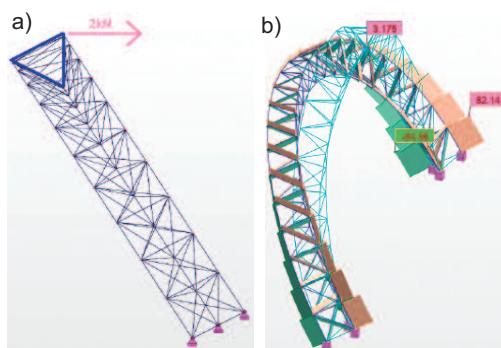
Na podstawie uzyskanych wartości momentu bezwładności przekroju przyjęto, że w celu potwierdzenia uzyskanych wyników za pomocą programu Robot przyjęty zostanie układ o rozstawie krawężników  $r = 100$  cm, gdzie  $r$  to promień okręgu, na którym opisany jest przekrój poprzeczny dźwigara, tj. trójkąt równoboczny. W celu uproszczenia przyjęto, że obciążenie stanowić będą jedynie siły poziome o wartości 2 kN (siła wstępne-go naciągu ciągien), przyłożone do węzłów jednego z krawężników. Jako krawężniki przyjęto wstępnie profile RO 457  $\times$  25, a jako skratowania profile RO 219,1  $\times$  6,3. Za pomocą modelu parametrycznego, opracowanego w programie Dynamo, importowano kolejne układy konstrukcyjne ze zmieniającymi się wartościami kątów obrotu przekroju poprzecznego dźwigara. Typ analizowanej konstrukcji wprowadzono do programu Robot jako kratownicę

treated as hinged, and the only internal forces considered were axial – compression and tension within the girder members. While adopting a model with continuous chords would more closely reflect the actual behavior of the structure, the definition of releases was not implemented in the parametric model. Therefore, a simplified analysis was carried out based on the truss model, which remains consistent with classical truss theory. Figure 4 presents the cross-section configuration, the applied loading, and a sample axial force diagram along with the resulting maximum global displacement at the load application node for a selected cross-section rotation angle.

The values of global displacements of the girder ( $U$ ) and the extreme axial forces for the analyzed rotation angles of the girder's cross-section are presented in Figure 5. An analysis of the results shows that the smallest displacements (i.e., the highest structural stiffness) occur in the range of  $0^\circ$ – $40^\circ$  and  $260^\circ$ – $360^\circ$ . However, practical feasibility of cable anchorage is limited to the range of  $0^\circ$ – $120^\circ$ . A noticeable decreasing trend in the graph is likely caused by the changing moment arm of the forces relative to the base of the girder as the cross-section rotates. This observation is further confirmed by numerical simulations conducted for girder inclinations of  $15^\circ$  and for a non-inclined case ( $0^\circ$ ). Figure 5 also shows the variation in extreme axial forces (compression and tension) occurring in the bars of the analyzed girder models. It can be observed that as the compressive forces decrease, the magnitude of the tensile forces increases.

Based on the results obtained in this section, the rotation angle of the analyzed girder's cross-section was set to  $80^\circ$ . For this configuration, the actual loads acting on the girder were compiled, and structural profiles were selected to satisfy both ultimate and serviceability limit states. The resulting stress map of individual members is shown in Figure 6. Members with utilization below 40% are marked in yellow, those with 40–80% utilization in green, and those exceeding 80% in red.

It can also be observed that there is a group of members with relatively low utilization, for which smaller cross-sections could be selected – this would have a positive impact on the steel usage efficiency. However, for the purposes of further analysis, it was assumed that the same

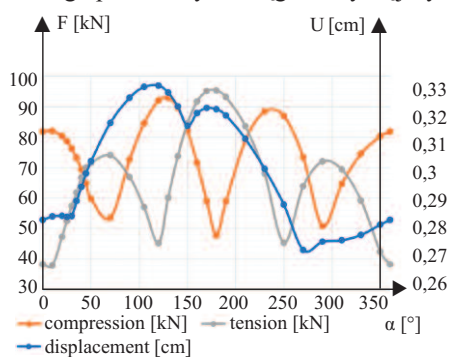


**Fig. 4. Analyzed arch girder: a) cross-section through the girder and the node with the applied load; b) values of axial forces and displacements for the girder with the cross-section rotation angle of  $0^\circ$**

*Rys. 4. Analizowany dźwigar łukowy: a) przekrój poprzeczny przez dźwigar i węzeł z przyłożonym obciążeniem; b) wartości sił osiowych i przemieszczeń w przypadku dźwigara o kącie obrotu przekroju poprzecznego  $0^\circ$*

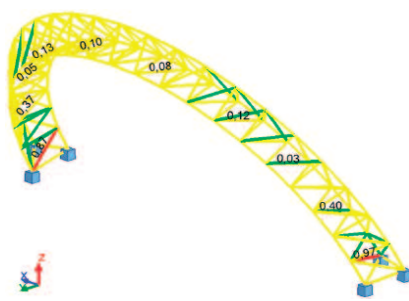
nej konfiguracji kąta obrotu przekroju poprzecznego.

Uzyskane wartości przemieszczeń globalnych dźwigara  $U$  oraz ekstremalnych sił osiowych w przypadku analizowanych wartości zmiany kąta obrotu przekroju dźwigara przedstawiono na rysunku 5. Zauważono, że najmniejsze przemieszczenia (największa sztywność układu) występują w zakresie kąta  $0^\circ$ – $40^\circ$  oraz  $260^\circ$ – $360^\circ$ , ale możliwości wykonawcze zamocowania cięgien dotyczą jedynie kąta  $0^\circ$ – $120^\circ$ . Dostrzegalny stały trend malejących wartości jest prawdopodobnie spowodowany zmieniającym się ramieniem sił względem podstawy dźwigara, gdy przekrój się obraca. Znajduje to potwierdzenia także w przeprowadzonych symulacjach numerycznych odchylenia dźwigara od pionu o  $15^\circ$  oraz bez jego pochylania ( $0^\circ$ ). Dodatkowo na rysunku 5 przedstawiono zmianę ekstremalnych wartości sił osiowych (ściskających i rozciągających), jaka występowała w prętach analizowanych modeli dźwigarów. Zauważono, że



**Fig. 5. Influence of the angle of rotation of the girder cross-section ( $30^\circ$  deviation from the vertical) on changes in the maximum displacement of the girder (stiffness) and changes in the extreme values of axial forces**

*Rys. 5. Wpływ kąta obrotu przekroju poprzecznego dźwigara (odchylenie  $30^\circ$  od pionu) na zmianę maksymalnego przemieszczenia dźwigara (sztywność) i ekstremalnych wartości sił osiowych*



**Fig. 6. Stress map of the girder bars**  
*Rys. 6. Mapa wyęteżenia prętów dźwigara*

przestrzenną. W związku z tym wszystkie połączenia prętów traktowano jako przegubowe, a jedynie siły wewnętrzne związane są ze ściskaniem i rozciąganiem prętów dźwigara. Przyjęcie modelu z krawężnikami ciągłymi byłoby bliższe pracy konstrukcji rzeczywistej. Definiowanie zwolnień nie zostało jednak uwzględnione w modelu parametrycznym, dlatego zdecydowano się na przeprowadzenie uproszczonej analizy w odniesieniu do modelu kratownicowego (jest to zgodne z teorią kratownic). Na rysunku 4 przedstawiono konfigurację przekroju i obciążenie oraz przykładowy wykres sił osiowych wraz z uzyskanym maksymalnym przemieszczeniem globalnym węzła przyłożenia siły dla wybranej konfiguracji kąta obrotu przekroju poprzecznego.

Uzyskane wartości przemieszczeń globalnych dźwigara  $U$  oraz ekstremalnych sił osiowych w przypadku analizowanych wartości zmiany kąta obrotu przekroju dźwigara przedstawiono na rysunku 5. Zauważono, że najmniejsze przemieszczenia (największa sztywność układu) występują w zakresie kąta  $0^\circ$ – $40^\circ$  oraz  $260^\circ$ – $360^\circ$ , ale możliwości wykonawcze zamocowania cięgien dotyczą jedynie kąta  $0^\circ$ – $120^\circ$ . Dostrzegalny stały trend malejących wartości jest prawdopodobnie spowodowany zmieniającym się ramieniem sił względem podstawy dźwigara, gdy przekrój się obraca. Znajduje to potwierdzenia także w przeprowadzonych symulacjach numerycznych odchylenia dźwigara od pionu o  $15^\circ$  oraz bez jego pochylania ( $0^\circ$ ). Dodatkowo na rysunku 5 przedstawiono zmianę ekstremalnych wartości sił osiowych (ściskających i rozciągających), jaka występowała w prętach analizowanych modeli dźwigarów. Zauważono, że

gdy maleją siły powodujące ściskanie, to zwiększają się moduły sił powodujących rozciąganie. Na podstawie uzyskanych wyników przyjęto, że kąt obrotu przekroju analizowanego dźwigara będzie wynosił  $80^\circ$ . W przypadku takiego układu zestawiono rzeczywiste obciążenia przypadające na dźwigar oraz dobrano kształtowniki spełniające stany graniczne nośności i użytkowości. Uzyskaną w ten sposób mapę wyęteżenia poszczególnych prętów przedstawiono na rysunku 6. Kolorem żółtym oznaczono pręty o wyęteżeniu mniejszym niż 40%, zielonym pręty o wyęteżeniu 40–80%, a czerwonym powyżej 80%.

Stwierdzono, że istnieje grupa prętów o relatywnie niedużym wyęteżeniu, którym można dobrać mniejszy przekrój, co pozy-

profiles would be assigned to all vertical and diagonal members. Based on the performed design procedure, new girder cross-sections were adopted: RO 159 × 17.5 for the chords and RO 114.3 × 14.2 for the bracing elements.

### Analysis of Changes in Chord Spacing

As previously mentioned and illustrated, one of the key factors influencing the stiffness of the spatial truss girder is the spacing between its chords. This section analyzes selected spatial girder configurations with varying chord spacing. For each configuration, predefined groups of structural members were subjected to load-bearing capacity verification and, if necessary, re-dimensioned accordingly. The process began with the generation of successive models using the developed Dynamo script. In all models, the cross-section rotation angle was kept constant at 80°, while the chord spacing was varied. Six values of spacing were considered:  $r = 60, 80, 100, 150, 200, 250$  cm. Each model was exported to Autodesk Robot Structural Analysis, where loads and member properties were defined for structural sizing.

Figure 7 presents the axial force distribution and maximum global displacements for one of the analyzed configurations (with chord spacing  $r = 100$  cm). The corresponding results are summarized in Table 1. It was observed that increasing the chord spacing resulted in a noticeable reduction in both displacements and axial forces. This trend is further confirmed by the chord spacing – displacement relationship shown in Figure 8. In the subsequent stage, the load-bearing capacities of the steel members were verified in accordance with the relevant standard [15], and serviceability criteria were also evaluated. The results are presented in Table 2, which summarizes the maximum utilization ratios of the bracing members and chords for each chord spacing configuration. For chord spacings of 60 cm and 80 cm, the limit states are exceeded. In contrast, for spacings between 150 cm and 200 cm, a reserve in load-bearing capacity is observed. At a spacing of 250 cm, the utilization increases to a value of 1.0, likely due to changes in the effective buckling lengths of the bracing members and the resulting force distribution. For the chords, utilization decreases with increasing spacing. To illustrate the influence of chord spacing on the structural weight, a diagram was prepared and is shown in Figure 9a. Based on this analysis – consi-

tywnie wpłynęłoby na wskaźnik zużycia stali. Do dalszych analiz przyjęto, że prętom słupków i skratowań przypisywane będą te same kształtowniki. Na podstawie przeprowadzonej procedury wymiarowania założono nowe przekroje dźwigara: krawężników RO 159 x 17,5, a skratowań RO 114,3 x 14,2.

### Analiza zmiany rozstawu krawężników

Jednym z czynników wpływających na sztywność przestrzennego dźwigara kratownicowego jest rozstaw jego krawężników. Przeanalizowano wybrane układy przestrzenne dźwigarów, w których zmieniano rozstaw krawężników. Za każdym razem zdefiniowane grupy prętów dźwigara poddawano weryfikacji nośności, a w razie potrzeby także ponownemu wymiarowaniu. Wygenerowano kolejne modele za pomocą opracowanego skryptu Dynamo. W modelach tych przyjęto stały kąt obrotu przekroju 80°, a zmienny był rozstaw krawężników dźwigara:  $r = 60, 80, 100, 150, 200, 250$  cm. Każdy model eksportowano do programu Robot, gdzie definiowano obciążenia oraz parametry prętów służące do ich wymiarowania.

Na rysunku 7 przedstawiono wykres sił osiowych oraz maksymalne globalne przemieszczenia w jednym z analizowanych wariantów dźwigara (rozstaw krawężników  $r = 100$  cm). Uzyskane wyniki zestawiono w tabeli 1. Zwiększanie rozstawu krawężników powoduje wyraźne zmniejszenie przemieszczeń oraz sił osiowych. Potwierdza to wykres zależności przemieszczenia od rozstawu krawężników, przedstawiony na rysunku 8. W kolejnym etapie zweryfikowano nośność prętów stalowych (zgodnie z normą [15]) oraz sprawdzono kryteria użytkowości (tabela 2). Podano maksymalne wyężenia, jakie osiągają pręty skratowań i krawężników. W przypadku rozstawu 60 i 80 cm, zostały przekroczone stany graniczne, rozstawu 150 – 200 cm – występuje zapas nośności, a rozstawu 250 cm – wyężenie zwiększyło się do 1,0, co jest prawdopodobnie spowodowane zmianą długości wybozeniowej prętów skratowań oraz zmianą sił. Wyężenie krawężników maleje wraz ze zwiększeniem ich rozstawu. Na rysunku 9 pokazano wpływ rozstawu krawężników na ciężar konstrukcji. Na tej podstawie przyjęto, biorąc pod uwagę ciężar i sztywność dźwigara, że optymalny ich rozstaw wynosi  $r = 150$  cm ( $a = 260$  cm).

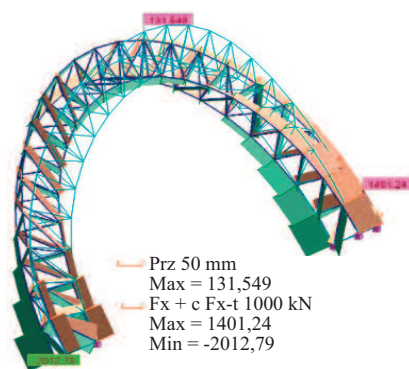


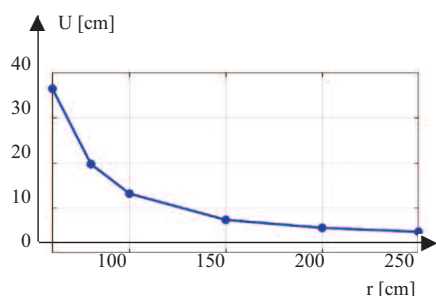
Fig. 7. Values of axial forces and displacements ( $r = 100$  cm)

Rys. 7. Wartości sił osiowych i przemieszczenia ( $r = 100$  cm)

Table 1. List of features and parameters calculated in the Robot program for different curb spacing

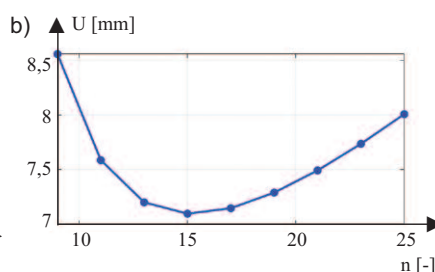
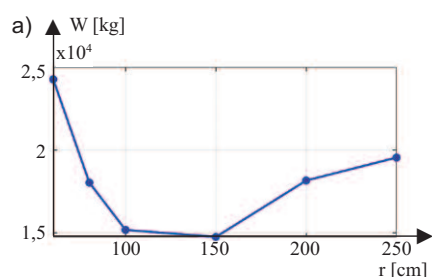
Tabela 1. Zestawienie cech i parametrów obliczonych w programie Robot w przypadku różnego rozstawu krawężników

| Spacing $r$<br>[cm]/<br>Rozstaw<br>$r$ [cm] | Side $a$<br>[m]/<br>Bok $a$<br>[m] | Maximum<br>displacements<br>[cm]/<br>Przemieszczenia<br>maksymalne [cm] | Force [kN]/Siła [kN]     |                            | Utilization of<br>bracing<br>members/<br>Wyężenie<br>skratowań | Utilization<br>of chords/<br>Wyężenie<br>krawężników |
|---------------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
|                                             |                                    |                                                                         | tensile/<br>rozciągająca | compressive/<br>ściskająca |                                                                |                                                      |
| 60                                          | 1,04                               | 36,46                                                                   | -3420,78                 | 2314,18                    | 1,83                                                           | 1,72                                                 |
| 80                                          | 1,39                               | 19,71                                                                   | -2534,07                 | 1706,71                    | 1,27                                                           | 1,28                                                 |
| 100                                         | 1,74                               | 13,15                                                                   | -2012,79                 | 1401,24                    | 0,94                                                           | 0,97                                                 |
| 150                                         | 2,6                                | 7,31                                                                    | -1297,37                 | 977,78                     | 0,79                                                           | 0,61                                                 |
| 200                                         | 3,46                               | 5,54                                                                    | -937,5                   | 761,99                     | 0,86                                                           | 0,47                                                 |
| 250                                         | 4,33                               | 4,67                                                                    | -721,15                  | 630,74                     | 1                                                              | 0,36                                                 |



**Fig. 8. The nature of displacement changes depending on the curb spacing**

Rys. 8. Charakter zmian przemieszczeń maksymalnych w zależności od rozstawu krawężników



**Fig. 9. Changes: a) the total weight of the bars depending on the curb spacing; b) displacement size depending on the number of girder segments**

Rys. 9. Zmiana: a) całkowitej masy prętów w zależności od rozstawu krawężników; b) przemieszczeń w zależności od liczby segmentów dźwigara

dering both the girder's self-weight and stiffness – it was determined that the optimal chord spacing is  $r = 150$  cm (with corresponding panel length  $a = 260$  cm).

### Analysis of the Effect of Girder Segmentation

In the final stage, the influence of the number of segments in the spatial truss girder on its structural performance within the roof system was analyzed, focusing primarily on:

- the stiffness of the structure (maximum displacement);
- the internal force values in the chords and bracing members;
- the overall weight of the structure.

Based on the findings from the previous stages, the reference configuration was defined as a girder with a cross-section rotation angle of  $80^\circ$ , a chord spacing of  $r = 150$  cm, and 23 segments. Subsequently, analogous configurations were generated with the number of segments varying from 9 to 25. The profiles assigned to the vertical and diagonal members corresponded to those listed in Table 2. To ensure the comparability of results – given that varying the number of segments alters the number of load application points – the same loading conditions were applied to all configurations. Specifically, the highest cable force obtained from the actual load case, equal to 71.35 kN, was used as the basis. Each configuration was subjected to a single concentrated force applied at the apex of the structure. The same numerical procedure was followed for all cases, and the corresponding results are summarized in Table 3.

Analysis of the displacement variations presented in Figure 9b indicates

**Table 2. Summary of weight and stress of girder bars**

Tabela 2. Zestawienie ciężaru i wytrzymałości prętów dźwigara

| Chord spacing $r$ [cm]/<br>Rozstaw krawężników $r$ [cm] | Bracing members/Skratowania     |                                 |                         | Chords/Krawężniki               |                                 |                         | Total mass<br>W/Masa całkowita [kg] |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------|-------------------------------------|
|                                                         | cross-section/<br>przekrój [mm] | utilization/<br>wyciążenie [mm] | mass [kg]/<br>masa [kg] | cross-section/<br>przekrój [mm] | utilization/<br>wyciążenie [mm] | mass [kg]/<br>masa [kg] |                                     |
| 60                                                      | 168,3 x 20                      | 0,89                            | 13785                   | 244,5 x 20                      | 0,95                            | 10501                   | 24286                               |
| 80                                                      | 127 x 16                        | 1,00                            | 9954                    | 193,7 x 20                      | 0,91                            | 8088                    | 18042                               |
| 100                                                     | 114,3 x 14,2                    | 0,94                            | 9419                    | 159 x 17,5                      | 0,97                            | 5767                    | 15186                               |
| 150                                                     | 108 x 12,5                      | 0,98                            | 11031                   | 127 x 14,2                      | 0,94                            | 3728                    | 14759                               |
| 200                                                     | 114,3 x 12,5                    | 0,99                            | 15283                   | 101,6 x 14,2                    | 0,95                            | 2888                    | 18171                               |
| 250                                                     | 127 x 10                        | 0,97                            | 17326                   | 88,9 x 12,5                     | 0,93                            | 2233                    | 19559                               |

### Analiza wpływu liczby segmentów dźwigara

W ostatnim etapie przeanalizowano wpływ liczby segmentów przestrzennego dźwigara kratownicowego na jego pracę w konstrukcji przekrycia, a przede wszystkim:

- sztywność konstrukcji (maksymalne przemieszczenie);
- wartości sił wewnętrznych w krawężnikach i skratowaniach,
- ciężar konstrukcji.

Na podstawie wcześniejszych analiz, jako wyjściowy układ przyjęto dźwigar o kącie obrotu przekroju poprzecznego  $80^\circ$ , rozstawie krawężników  $r = 150$  cm i liczbie 23 segmentów. Następnie utworzono analogiczne układy, odpowiednio z liczbą segmentów od 9 do 25. Kształtowniki słupków i krzyżulców odpowiadały przekrojom podanym w tabeli 2. Przyjęto identyczne obciążenia, by móc porównać uzyskane wyniki między sobą (zmiana liczby segmentów wpływa na liczbę węzłów, w których przykładane jest obciążenie). W tym celu wybrano największą siłę działającą

w kablach (na podstawie przypadku obciążeń rzeczywistych) wynoszącą 71,35 kN. Następnie każdy analizowany układ obciążono jedną tylko siłą, przyłożoną w szczytowym punkcie konstrukcji. Podobne obliczenia numeryczne wykonano w przypadku innych analizowanych układów, a otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 3.

Stwierdzono, że najmniejsze przemieszczenia konstrukcji uzyskano w przypadku układu z 15 segmentami skratowań (rysunek 9). Masa konstrukcji zwiększa się wraz ze wzrostem liczby segmentów (więcej prętów), chociaż

**Table 3. Summary of extreme values of axial forces and displacements depending on the number of girder segments**

Tabela 3. Zestawienie ekstremalnych wielkości sił osiowych oraz przemieszczeń w zależności od liczby segmentów dźwigara

| Number of segments/<br>Liczba segmentów | Displacement<br>[mm]/Przemieszczenie [mm] | Force/Siła [kN]               |                                 | Total mass/<br>Masa konstrukcji [kg] |
|-----------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
|                                         |                                           | tensile/<br>rozciągająca [kN] | compressive/<br>ściskająca [kN] |                                      |
| 25                                      | 8,007                                     | 121,59                        | 87,57                           | 19985                                |
| 23                                      | 7,735                                     | 121,43                        | 87,36                           | 18936                                |
| 21                                      | 7,492                                     | 121,22                        | 87,13                           | 17893                                |
| 19                                      | 7,289                                     | 120,96                        | 86,84                           | 16897                                |
| 17                                      | 7,146                                     | 120,63                        | 86,5                            | 15894                                |
| 15                                      | 7,096                                     | 120,23                        | 86,07                           | 14915                                |
| 13                                      | 7,2                                       | 119,77                        | 85,52                           | 13962                                |
| 11                                      | 7,586                                     | 119,31                        | 84,77                           | 13024                                |
| 9                                       | 8,557                                     | 119,07                        | 84,34                           | 12135                                |

that the smallest structural displacements were obtained for the configuration with 15 bracing segments. It is also evident that the structural mass increases with the number of segments, due to the higher number of members. However, these results do not account for variations in member utilization or the potential for cross-sectional optimization in response to changes in internal force distributions – estimated at up to 4%.

## Summary

This study investigated the structural performance of various spatial configurations of triangular cross-section truss girders integrated with the membrane roof of an amphitheater. A key element in the development of computational models was the parametric geometric model created in Dynamo. This enabled the generation of structural models in Autodesk Robot Structural Analysis, with assigned cross-sections, supports, and initial loads. Full integration between the two programs was not achieved, and several steps – such as defining load combinations and verifying member capacity – were performed manually in Robot. An exception was made for the analysis involving the cable – membrane roof, which was conducted in RFEM using its Form-Finding module.

The parametric analysis focused on three main variables: cross-section rotation angle, chord spacing, and the number of bracing segments. To assess the impact of these parameters on structural stiffness, weight, and member utilization, both structural and strength calculations were performed. The analysis identified an optimal configuration characterized by a cross-section rotation angle of  $80^\circ$ , chord spacing of  $r = 150$  cm (corresponding to the radius of a circle circumscribing an equilateral triangle with side length  $a = 2.6$  m), and 15 bracing segments. Although detailed information on the actual dimensions and cross-sections used in the reference structure is not available in the literature [8], the observed number of bracing segments (14) is comparable to that identified in the optimal configuration.

Received: 24.02.2025  
Revised: 01.04.2025  
Published: 23.07.2025

wyniki te nie uwzględniają zmiany wyężenia elementów i ewentualnej możliwości zmiany kształtownika z uwagi na zmieniające się siły wewnętrzne (do 4%).

## Podsumowanie

Przeanalizowano pracę różnych wariantów przestrzennych dźwigarów kratownicowych o przekroju trójkątnym, współpracujących z membranowym przekryciem amfiteatru. Znaczącym ułatwieniem w tworzeniu modeli obliczeniowych okazał się parametryczny model geometryczny stworzony w programie Dynamo, a następnie model konstrukcji w programie Robot, który miał przypisane kształtowniki, podpory i obciążenia wstępne. Nie udało się powiązać obu programów w taki sposób, aby obliczenia wykonywać w pełni automatycznie. Wiele czynności związanych z definiowaniem kombinatoryki obciążeń oraz wymiarowaniem prętów dźwigara wykonywano za pomocą programu Robot. Wyjątek stanowiły obliczenia związane z przekryciem cięgnowo-membranowym, które przeprowadzono w programie RFEM, posiadającym moduł Form-Finding.

Przedstawiona analiza wariantowa koncentruje się przede wszystkim na trzech parametrach modelu: kącie obrotu przekroju poprzecznego; rozstawie krawężników i liczbie segmentów skratowań. Aby zbadać wpływ tych czynników na sztywność, ciężar i wyężenie elementów konstrukcji, przeprowadzono obliczenia statyczno-wytrzymałościowe, które ostatecznie pozwoliły wybrać optymalny układ konstrukcyjny o kącie obrotu przekroju poprzecznego wynoszącym  $80^\circ$ , rozstawie krawężników  $r = 150$  cm (promień okręgu, na którym opisany jest przekrój poprzeczny dźwigara, tj. trójkąt równoboczny o boku  $a = 2,6$  m) i liczbie skratowań 15. Mimo że informacja o zastosowanych wymiarach i przekrojach prętów w rzeczywistej konstrukcji nie jest dostępna w literaturze [8], to odczytana liczba skratowań jest podobna i wynosi 14.

Artykuł wpłynął do redakcji: 24.02.2025 r.  
Otrzymano poprawiony po recenzjach: 01.04.2025 r.  
Opublikowano: 23.07.2025 r.

## Literature

[1] Kurzawa Z. Stalowe konstrukcje prętowe. Cz. II. Struktury przestrzenne, przekrycia cięgnowe, maszty i wieże. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2011.  
[2] Trojanowska M. Contemporary architecture of open-air theatres in historic environments. Journal of Heritage Conservation. 2019. DOI: 10.17425/wk60openair.  
[3] Chodor L. Przekrycia cięgnowo-membranowe. [Online]. Dostępne na: <https://chodor-projekt.net/encyclopedia/konstrukcje-ciegnowe/>.  
[4] Bróź N. Variant analysis of the load capacity of spatial truss girders cooperating with the membrane covering of the amphitheater. Praca Dyplomowa, Rzeszów University of Technology, 2022.  
[5] Berger H. Form and function of tensile structures for permanent buildings. Engineering Structures. 1999. DOI: 10.1016/S0141-0296(98)00022-4.  
[6] Jurczakiewicz S. Dachy membranowe. Nowoczesne Hale. 2018; (2): 22 – 25.  
[7] Zagubień A. Budownictwo ogólne. Tom 4. Konstrukcje budynków. W. Buczkowski, Red., Arkady, 2009, s. 575–594.  
[8] Gerlic K. Zadaszenia membranowe w Polsce – swoboda kształtowania. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2018.

[9] Shi J-X, Wu Z, Tsukimoto S, Shimoda M. Design optimization of cable-membrane structures for form-finding and stiffness maximization. Composite Structures. 2018. DOI: 10.1016/j.compstruct. 2018.03.033.  
[10] Amphitheater in Stężyca – high-tension spatial membrane. [Online]. Dostępne na: [https://www.plandeki.com.pl/9,455,500,konstrukcja\\_membranowa\\_stezyca.html](https://www.plandeki.com.pl/9,455,500,konstrukcja_membranowa_stezyca.html).  
[11] Kozdroń K, Mrowiec L, Dłubał RFEM5 i RSTAB8. 2017. [Online]. Dostępne na: <https://inzygnierbudownictwa.pl/dlubał-rfem-5-i-rstab-8/>.  
[12] PN-EN 1991-1-3: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-3: Oddziaływania ogólne. Obciążenie śniegiem.  
[13] PN-EN 1991-1-4: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-4: Oddziaływania ogólne. Oddziaływania wiatru.  
[14] PN-EN 1991-1-1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-1: Oddziaływania ogólne. Ciężar objętościowy, ciężar własny, obciążenia użytkowe w budynkach.  
[15] PN-EN 1993-1-1:2006 Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.  
[16] Bodnar A. Wytrzymałość materiałów: podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych. Politechnika Krakowska, 2004.