

dr hab. inż. Barbara Sadowska-Buraczewska^{1*)}

ORCID: 0000-0002-1238-1272

prof. dr hab. inż. Wiesława Głodkowska²⁾

ORCID: 0000-0003-3719-5350

Numerical analysis and experimental studies three-layer slabs of the Hoff

Analiza numeryczna i badania doświadczalne płyt trójwarstwowych Hoffa

DOI: 10.15199/33.2025.07.01

Abstract. The paper concerns three-layer slabs of the Hoff in terms of their use as independent slab floor elements. Three variants of the panels were analyzed, differing in the material from which the cladding and the core of the board were made. The result of the analysis was to determine the relationship between the load of the three-layer slab and its vertical displacements (deflections). The practical possibility of using the variational *finite difference approach* (MRS) and the *finite element method* (FEM) for the calculation of plate three-layer elements of the Hoff and homogeneous, isotropic plates has been demonstrated. For three variants of the plate, computer simulations were carried out using these methods and experimental verification of one of the variants was carried out. The article presents only a fragment of extensive experimental and analytical research.

Keywords: three-layer slabs; ordinary concrete; perlite concrete; fibrocomposite; numerical analysis; MRS; FEM.

Streszczenie. W artykule zaprezentowano płyty trójwarstwowe Hoffa w aspekcie zastosowania ich jako samodzielnych płytowych elementów stropowych. Przeanalizowano trzy warianty płyt z różnymi okładzinami i rdzeniem. Wynikiem analiz było określenie zależności pomiędzy wielkością obciążenia płyty trójwarstwowej a jej przemieszczeniami pionowymi (ugięciami). Wykazano praktyczną możliwość stosowania metody wariacyjnego ujęcia różnic skończonych (MRS) i metody elementów skończonych (MES) do obliczania płytowych elementów trójwarstwowych Hoffa oraz izotropowych płyt jednorodnych. Przeprowadzono symulacje komputerowe tymi metodami trzech wariantów płyty oraz dokonano weryfikacji doświadczalnej jednego z wariantów. W artykule przedstawiono tylko fragment szerokiego badań doświadczalnych i analitycznych.

Słowa kluczowe: płyty trójwarstwowe; beton zwykły; perlitobeton; fibrokompozyt; analizy numeryczne; MRS; MES.

In the middle of the 20th century, N. Hoff published a theory on sandwich panels consisting of two faces (outer layers) made of high-strength materials joined by a filler (core) made of a lower-strength, lighter-weight material. In three-layer panels of the described construction, manufactured entirely in one cycle, there is continuity of displacement across the contact between the faces and the core, so there is no slippage between the layers. The modulus of elasticity of the outer layers significantly exceeds that of the filler. In deriving the relationship, Hoff assumed that the filler material is non-deformable in the direction perpendicular to the center surface. The outer layers of the slab are uniform and satisfy all the assumptions of the theory of thin discs and isotropic plates. From the assumptions made, it follows that in bending the deformation of this type of three-layer slab is antisymmetric with respect to its center surface. With properly selected component materials for the faces and core, such a three-layer structure can be optimized in such a way that each component contributes to the optimal properties of the whole structure under the given conditions.

Three-layer floor slabs constructed for use in construction should carry high service loads as well as provide high thermal and acoustic insulation. By comparing the slab floor systems currently used in practice with properly designed and

W połowie XX w. N. Hoff opublikował teorię dotyczącą płyt warstwowych, zwanych również płytami sandwichowymi, składających się z dwóch okładzin (warstw zewnętrznych) wykonanych z materiałów o dużej wytrzymałości, połączonych wypełniaczem (rdzeniem) z materiału o mniejszej wytrzymałości i mniejszym ciężarze niż okładziny. W płytach trójwarstwowych o opisanej konstrukcji, wykonanych w jednym cyklu, w poprzek styku okładzin z rdzeniem istnieje ciągłość przemieszczeń, a więc nie ma poślizgu między warstwami. Moduł sprężystości warstw zewnętrznych jest znacznie większy niż moduł sprężystości wypełniacza. Przy wyprowadzaniu zależności Hoff przyjął, że materiał wypełniacza jest nieodkształcalny w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej. Warstwy zewnętrzne płyty są jednakowe i spełniają wszystkie założenia teorii cienkich tarcz oraz płyt izotropowych. Z przyjętych założeń wynika, że przy zginaniu odkształcenia tego rodzaju płyty trójwarstwowej są antysymetryczne względem jej powierzchni środkowej. Dzięki odpowiednio dobranym materiałom składowym na okładziny i rdzeń, konstrukcję trójwarstwową można zoptymalizować w taki sposób, że każdy element składowy przyczynia się do uzyskania jak najlepszych, w danych warunkach, właściwości całej struktury.

Stropowe płyty trójwarstwowe, skonstruowane z myślą wykorzystania ich w budownictwie, powinny przenosić duże obciążenia użytkowe oraz zapewniać dobrą izolacyjność termiczną i akustyczną. Porównując aktualnie stosowane w praktyce płytowe systemy stropowe z odpowiednio zaprojektowa-

¹⁾ Politechnika Białostocka, Wydział Budownictwa i Nauk o Środowisku

²⁾ Politechnika Koszalińska, Wydział Inżynierii Lądowej, Środowiska i Geodezji

*) Correspondence address: barbara.sadowska@pb.edu.pl

constructed three-layer slabs, made of properly selected materials in terms of technical and geometric parameters, it is possible to achieve much better than existing floor element solutions.

In the 1970s and 1980s [2], the idea arose to design three-layer floor slabs for use in agricultural construction. Several three-layer slabs with a core of polystyrene foam and foam glass were manufactured and underwent successful field tests [3, 4]. However, the development of three-layer panels was discontinued at this stage and was not continued further, due to computational difficulties. At the end of the twentieth century, a group of researchers dealt with the issues related to computer simulation of deformation of the three-layer slab, along with evaluation of the effect on deformation of randomness of filler characteristics. The deformation of a Hoff's three-layer slab subjected to random loading with a normal distribution was also analyzed [5, 6, 7].

Mathematical models for evaluating the effect of randomness of filler characteristics of a three-layer slab were developed by Boniecki, Dworecki [8]. In a collective work edited by Magnucki, Oswald [9], the problems of stability and optimal shaping of individual layers of the slab in order to obtain the best possible properties of the three-layer structure, under the given conditions, were presented. Magnucki and Oswald dealt with a simplified model of three-layer slabs resulting from the assumption that the outermost layers carry only normal and tangential stresses in their plane and have no bending stiffness. This assumption corresponds to sandwich panels with thin outer layers. Staszak et al. [10] presented two approaches to calculating three-layer slabs of the Hoff model. In the first, they presented a calculation algorithm using the variational finite difference method (FDM), assuming actual geometric and material parameters. In the second, they applied the method of numerical homogenization of the sandwich slab, replacing the stiffness of the individual layers with a homogeneous substitute slab with a shear-corrected substitute stiffness analytically derived by the shear correction factor. Comparing the two approaches, the authors concluded that it can be assumed that the static analysis of the slab by simplified methods using numerical homogenization with an analytical shear correction factor is appropriate and can be applied to sandwich structures. An interesting approach to homogenization, which allows simplifying the computational model and replacing the complex composite structure with a homogeneous slab, was proposed by Staszak et al. [11]. They derived a numerical homogenization method based on strain energy equivalence in precast concrete slabs reinforced with steel space trusses, homogenizing them to a single slab element with effective stiffness. Wachowiak and Wilde [12] dealt with FDM in variational terms as applied to finding solutions to shell theory problems. These authors gave a function describing the elastic strain energy for three-layer slabs that was the basis for the performed numerical calculations presented in this work [13].

The purpose of the conducted research and analysis was to demonstrate that FDM and FEM methods are suitable for solving the problems of three-layer slabs, and that the faces

nymi i skonstruowanymi płytami trójwarstwowymi, wykonanymi z właściwie dobranych materiałów pod kątem parametrów technicznych i geometrycznych, można uzyskać znacznie lepsze od dotychczasowych rozwiązania elementów stropowych.

W latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XX w. [2] powstał pomysł opracowania projektu trójwarstwowych płyt stropowych przeznaczonych do stosowania w budownictwie rolniczym. Wykonano kilka płyt trójwarstwowych z rdzeniem ze styropianu i szkła piankowego, które przeszły pomyślne badania poligonowe [3, 4]. Na tym etapie przerwano jednak prace nad rozwojem płyt trójwarstwowych i nie kontynuowano ich ze względu na trudności obliczeniowe. Pod koniec XX w. grono naukowców zajmowało się zagadnieniami związanymi z komputerową symulacją deformacji płyty trójwarstwowej wraz z oceną wpływu na losowość deformacji cech wypełniacza. Analizowano również deformację płyty trójwarstwowej Hoffa poddanej losowemu obciążeniu o rozkładzie normalnym [5, 6, 7].

Modele matematyczne dotyczące oceny wpływu losowości cech wypełniacza płyty trójwarstwowej opracowali Boniecki, Dworecki [8]. W pracy zbiorowej [9] przedstawiono problemy dotyczące stabilności i optymalnego kształtowania poszczególnych warstw płyty w celu uzyskania jak najlepszych, w danych warunkach, właściwości płyty trójwarstwowej. Magnucki i Oswald [9] zajmowali się uproszczonym modelem płyt trójwarstwowych wynikającym z przyjętego założenia, że warstwy skrajne przenoszą w swojej płaszczyźnie jedynie naprężenia normalne i styczne oraz nie mają sztywności na zginanie. Założenie to odpowiada płytom warstwowym o cienkich warstwach zewnętrznych. Staszak i in. [10] przedstawili dwa podejścia do obliczania płyt trójwarstwowych modelu Hoffa. W pierwszym zaprezentowali algorytm obliczeniowy z zastosowaniem metody różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym (MRS), przyjmując rzeczywiste parametry geometryczne i materiałowe. W drugim przypadku zastosowali metodę numerycznej homogenizacji płyty warstwowej, zastępując sztywność poszczególnych warstw jednorodną płytą o sztywności zastępczej, skorygowanej przy ścinaniu analitycznie wyprowadzonym współczynnikiem korekcyjnym ścinania. Porównując oba podejścia, autorzy stwierdzili, że analiza statyczna płyty metodami uproszczonymi z wykorzystaniem homogenizacji numerycznej, z analitycznym współczynnikiem korekcji ścinania, jest właściwa i może być zastosowana do konstrukcji warstwowych. Ciekawe podejście do homogenizacji, która pozwala uprościć model obliczeniowy i zastąpić skomplikowaną strukturę kompozytową jednorodną płytą, zaproponowali Staszak i in. [11]. Wyprowadzili numeryczną metodę homogenizacji bazującą na równoważności energii odkształcenia w prefabrykowanych płytach betonowych, zbrojonych stalowymi kratownicami przestrzennymi, homogenizując je do pojedynczego elementu płytowego o efektywnej sztywności. Wachowiak i Wilde [12] zajmowali się MRS w ujęciu wariacyjnym w zastosowaniu do poszukiwania rozwiązań z zakresu teorii powłok i podali funkcjonal opisujący energię odkształcenia sprężystego płyt trójwarstwowych, który był podstawą wykonanych obliczeń numerycznych prezentowanych w [13].

Celem prowadzonych badań i analiz było wykazanie, że metody MRS i MES nadają się do rozwiązywania zagadnień płyt trójwarstwowych oraz że okładzinę takich płyt można wyko-

of such slabs can be made using traditional concrete or a fine-aggregate fiber composite made on waste sand aggregate. It should be noted that by using waste aggregate after the hydroclassification process as a full-fledged building material to produce a fine-aggregate fiber composite, these analyses fit into a worldwide trend related to Environmental Sustainability.

Technical characteristics of slab materials

Three variants of Hoff's three-layer model slab were analyzed (Tables 1 and 2). The slabs consist of three layers and are symmetrical with respect to the middle plane. The outer layers, the so-called faces, satisfy the assumptions of the theory of thin, isotropic, homogeneous plates, and the middle layer, the core, is non-deformable in the vertical direction.

The first variant of the slab was manufactured with the faces made of plain concrete and a core of perlite concrete. In variant II, the faces are fine aggregate fiber composite, and the core is perlite concrete. Variant III assumes that the core of the slab is of fine-aggregate fibrocomposite and the faces are of plain concrete. In each variant, the thickness of the faces was assumed to be 30 mm, the thickness of the core was assumed to be 60 mm, and the area of the three-layer slab ($l_x \times l_y$) was assumed to be 1200 x 600 mm. Table 1 lists the composition of concrete mixtures used to manufacture the three-layer slab, and Table 2 lists their properties [13, 14].

To manufacture the slabs of variants II and III, a fine-aggregate fiber composite was adopted because, it has mechanical and physical properties that are superior or similar to ordinary concrete [14]. Studies published in papers [15, 16] have shown that fine-aggregate fiber composite behaves like ordinary concrete in flexural elements with conventional reinforcement. The addition of steel fibers significantly

nać, stosując tradycyjny beton lub drobnokruszywowy fibrokompozyt wykonany na odpadowym kruszywie piaskowym. Należy zaznaczyć, że przez zastosowanie kruszywa odpadowego (po procesie hydroklasyfikacji), jako pełnowartościowego surowca budowlanego do wytworzenia drobnokruszywowego fibrokompozytu, analizy te wpisują się w ogólnosiwiatową tendencję związaną ze zrównoważonym rozwojem środowiska.

Charakterystyka techniczna materiałów płyty

Analizą objęto trzy warianty płyty trójwarstwowej modelu Hoffa (tabela 1 i 2). Trzy warstwy płyty są symetryczne względem płaszczyzny środkowej. Warstwy zewnętrzne, tzw. okładziny, spełniają założenie teorii płyt cienkich, izotropowych, jednorodnych, a warstwa środkowa (rdzeń) jest nieodkształcalna w kierunku pionowym.

Pierwszy wariant płyty ma okładziny z betonu zwykłego i rdzeń z perlitobetonu. W wariantcie II okładziny stanowi drobnokruszywowy fibrokompozyt, a rdzeń perlitobeton, natomiast w wariantcie III założono, że rdzeń płyty jest z drobnokruszywowego fibrokompozytu, a okładziny z betonu zwykłego. W każdym z wariantów przyjęto grubość płyt okładzinowych 30 mm, grubość rdzenia 60 mm i powierzchnię płyty trójwarstwowej ($l_x \times l_y$) 1200 x 600 mm. W tabeli 1 podano skład mieszanek betonowych, z których wykonano płytę trójwarstwową, a w tabeli 2 ich właściwości [13, 14].

Do skonstruowania wariantu II i III płyty przyjęto drobnokruszywowy fibrokompozyt, ponieważ charakteryzuje się właściwościami mechaniczno-fizycznymi lepszymi bądź zbliżonymi do betonu zwykłego [14]. Badania opublikowane m.in. w [15, 16] wykazały, iż drobnokruszywowy fibrokompozyt zachowuje się jak beton zwykły w zginanych elementach ze zbrojeniem konwencjonalnym. Dodatek włókien stalowych w istotny sposób poprawia nośność na zginanie i ści-

Table 1. Concrete mix depots per 1 m³

Tabela 1. Skład mieszanek betonowych na 1 m³

Ingredient/ Składnik mieszanki			Ordinary concrete/ Beton zwykły	Fiber compo- site/Fibro- kompozyt	Perlite concrete/ Perlito- beton
Cement: CEM I-42,5R CEM II/A-V 42,5R [kg]			350	–	350
Aggregate [kg]/ Kru-szywo [kg]	sand/ piasek	0 – 2 mm	637	–	–
		0 – 4 mm ^{*)}	–	1570	–
	gravel/ żwir	2 – 4 mm	355	–	355
		4 – 8 mm	828	–	828
Perlite 0 – 2 mm/Perlit 0–2 mm [kg]			–	–	600
Silica dust/Pył krzemionkowy [kg]			–	21	–
Superplasticizer/Superplastyfikator [l]			–	16,8	5
Tap water/Woda wodociągowa [l]			178	160	178
Steel fibers/Włókna stalowe $\lambda = l/d = 62,5$ ($l = 50$ mm, $d = 0,8$ mm) [kg]			–	94 (1,2%)	–

*) aggregate that is a post-production waste from the hydroclassification process. Fiber composite is patented under patent No. 239641/kruszywo będące odpadem poprodukcyjnym w procesie hydroklasyfikacji. Fibrokompozyt zastrzeżony jest patentem Nr 239641.

Table 2. Material characteristics of three-layer slabs

Tabela 2. Charakterystyka materiałowa płyt trójwarstwowych

Properties/Właściwości	Perlite concrete/ Perlitobeton	Ordinary concrete/ Beton zwykły	Fiber composite/ Fibrokompozyt
	mean values (coefficient of variation v)/ średnie wartości (współczynnik zmienności v)		
Apparent density ρ [kg/m ³]/ Gęstość pozorna ρ [kg/m ³]	19 (v = 1,8%)	24 (v = 0,8%)	23 (v = 0,7%)
Cubic compressive strength $f_{c,cube}$ [MPa]/Wytrzymałość na ściskanie kostkowa $f_{c,cube}$ [MPa]	10,09 (v = 10,7%)	32,4 (v = 3,7%)	67,6 (v = 3%)
Cylindrical compressive strength $f_{c,cyl}$ [MPa]/Wytrzymałość na ściskanie walcowa $f_{c,cyl}$ [MPa]	8,82 (v = 9,6%)	25,41 (v = 3,5%)	64,4 (v = 6%)
Splitting tensile strength $f_{t,sp}$ [MPa]/ Wytrzymałość na rozciąganie przy rozłupywaniu $f_{t,sp}$ [MPa]	–	–	7,3 (v = 8%)
Static modulus of elasticity E_{cm} [GPa]/Statyczny moduł sprężystości E_{cm} [GPa]	10,07 (v = 1,8%)	32,6 (v = 1,9%)	36,7 (v = 7%)
Kirchhoff's Model G_w [GPa]/ Moduł Kirchhoffa G_w [GPa]	5,64 (v = 1,6%)	13,58 (v = 2%)	15,29 (v = 7%)

improves the flexural and shear capacity of such elements, making it possible to reduce conventional reinforcement [17, 18]. The addition of steel fibers also reduces the opening width of cracks perpendicular to the axis of the element and diagonal cracks. The nature of steel fiber work in the buttress zone has been shown to be superior to that of stirrups due to the more ductile nature of the material [16].

Computational Methods and Experimental Verification

The calculation of Hoff three-layer slabs was carried out using the finite difference method (FDM) and the finite element method (FEM). For the variant I slab, FDM and FEM calculations were carried out and experimental tests were performed to verify the results of the numerical calculations. For variant II and III, calculations were carried out using the FEM method to demonstrate its suitability for calculating Hoff's three-layer slabs.

The literature lacks practical solutions for Hoff's three-layer slabs. This is due to the need to devote a large amount of calculus work to obtain them and a good mastery of methods for solving higher-order differential equations. Taking this into account, it seems that practical solutions for this type of structures can be sought through numerical calculations using the finite difference method. Buczkowski [4] presented an application of the variational finite difference method to find solutions for the aforementioned slabs. The essence of the problem is to determine the minimum for the elastic strain energy function of a bent three-layer slab. The equilibrium equations derived by Hoff [1] for three-layer slabs with faces satisfying the assumptions of thin discs and isotropic plates, expressed in terms of three displacements u , v , w , are presented as a system of three partial differential equations (1), where: $u(x, y)$ is the displacement in the midplane of the lower face in the x -axis direction, $v(x, y)$ the displacement in the midplane of the lower face in the y -axis direction, $w(x, y)$ describes the vertical displacement, the same for all layers, namely:

$$\begin{aligned} \left[D \frac{1-v^2}{E\delta} \nabla^2 \nabla^2 - \frac{(1-v^2)G_w(2h+\delta)^2}{4E\delta h} \right] w - \frac{(1-v^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{(1-v^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial v}{\partial y} &= q \frac{(1-v^2)}{2E\delta} \\ - \frac{(1-v^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{(1-v^2)G_w}{E\delta h} \right] u + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0 \\ - \frac{(1-v^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(1-v^2)G_w}{E\delta h} \right] v &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

In the equations above (1), the following designations are adopted: E , ν – Young's modulus and Poisson's ratio of the material of the outer layers; G_w – modulus of elastic strain of the middle layer; δ , $2h$ – thicknesses of the outer and middle layers; $D = E\delta^3/12(1-\nu^2)$ – stiffness of the outer (face) layer.

Using the elastic strain energy function for a bent three-layer slab [12], it was proposed to find solutions for the mentioned slabs, using a variational approach of the finite difference method. An

nanie takich elementów, dzięki czemu możliwa jest redukcja zbrojenia konwencjonalnego [15]. Dodatek włókien stalowych ogranicza również szerokość rozwarcia rys prostopadłych do osi elementu i rys ukośnych. Charakter pracy włókien stalowych w strefie przypodporowej okazał się lepszy od pracy strzemion ze względu na bardziej ciągliwy charakter materiału [16].

Metody obliczeniowe i weryfikacja doświadczalna

Obliczenia płyt trójwarstwowych Hoffa przeprowadzono, stosując metodę różnic skończonych (MRS) i metodę elementów skończonych (MES). Przeprowadzono obliczenia MRS i MES wariantu I płyty oraz wykonano badania doświadczalne w celu zweryfikowania wyników obliczeń numerycznych. W przypadku wariantu II i III obliczenia przeprowadzono metodą MES, aby wykazać jej przydatność do obliczania płyt trójwarstwowych Hoffa.

W literaturze przedmiotu nie ma praktycznych rozwiązań płyt trójwarstwowych modelu Hoffa. Wynika to z konieczności poświęcenia dużego nakładu pracy rachunkowej do ich uzyskania oraz dobrego opanowania metod rozwiązywania równań różniczkowych wyższego rzędu. Uważamy, że praktycznych rozwiązań tego typu ustrojów można poszukiwać na drodze obliczeń numerycznych, stosując metodę różnic skończonych. Buczkowski [4] przedstawił zastosowanie metody wariacyjnego ujęcia różnic skończonych do poszukiwania rozwiązań wspomnianych płyt. Istota zagadnienia polega na wyznaczeniu minimum funkcjonału energii odkształcenia sprężystego zginanej płyty trójwarstwowej. Równania równowagi wyprowadzone przez Hoffa [1], dotyczące płyt trójwarstwowych z okładzinami spełniającymi założenia cienkich tarcz oraz płyt izotropowych, wyrażone za pomocą trzech przemieszczeń u , v , w , przedstawiono w postaci układu trzech cząstkowych równań różniczkowych (1), gdzie: $u(x, y)$ jest przemieszczeniem w płaszczyźnie środkowej dolnej okładziny w kierunku osi x' , $v(x, y)$ przemieszczeniem w płaszczyźnie środkowej dolnej okładziny w kierunku osi y , a $w(x, y)$ opisuje przemieszczenie pionowe, jednakowe w przypadku wszystkich warstw, a mianowicie:

W równaniach (1) przyjęto oznaczenia: E , ν – moduł Younga i współczynnik Poissona materiału warstw zewnętrznych; G_w – moduł odkształcenia postaciowego warstwy środkowej; δ , $2h$ – grubość warstw zewnętrznych i środkowej; $D = E\delta^3/12(1-\nu^2)$ – sztywność warstwy wewnętrznej (okładziny).

Korzystając z funkcjonału energii odkształcenia sprężystego zginanej płyty trójwarstwowej [12], zaproponowano do poszukiwania rozwiązań wspomnianych płyt zastosowanie wa-

important advantage of the variational approach of the finite difference method is that in the assumed system of unknowns, only the geometric boundary conditions must be satisfied, and the static conditions are satisfied naturally by the function itself. Four conditions are required at each edge of a three-layer slab. Figure 1 shows the partition grid of the calculated slab and marks the previously described boundary conditions for a three-layer slab with freely supported and free edges.

In order to simplify the calculations, the Poisson's ratio $\nu = 0$ was adopted for further considerations. By adopting $\nu = 0$ in the calculations, the elastic strain energy functional of the bent slab is greatly simplified. In the paper [2], a comparison of solutions for a three-layer slab band was provided when $\nu = 0$ and $\nu = 0.167$ were adopted. From the analysis of the posted solutions, it was apparent that the inclusion of $\nu = 0.167$ in the calculations has no significant effect on the result of the calculations. In this case, the elastic energy function of the bent slab takes the following form (2):

$$V = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ 2D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + 2E\delta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + 2hG_w \left[\frac{u^2}{h^2} + 2 \frac{u}{h} \frac{2h + \delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(2h + \delta)^2}{4h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{v^2}{h^2} + \frac{2v}{h} \frac{2h + \delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{(2h + \delta)^2}{4h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - \iint_S (q_z w + q_x u + q_y v) dx dy \quad (2)$$

When seeking functions u , v , w in the form of discrete values at the nodes of the slab division grid, the derivatives in the functional (2) should be replaced by appropriate differential schemes. The detailed procedure using FDM, the differential schemes and the constructed global matrix on general coefficients are discussed in [13]. Using this matrix, systems of displacement equations were created for three-layer slabs, for which computational models were built with the properties given in Table 2. Using the finite difference method for the parameters of the concretes used (variant I), deflections, failure force and tensile stresses were determined for three-layer slabs [13].

In order to verify the results of FDM and FEM numerical calculations, experimental tests were carried out (Photo). Slabs (variant I) with a cross-section of 600 x 1200 mm and a thickness of 120 mm (unit 3) were tested as free-supported on two opposite edges, loaded centrally with a concentrated force. The test pieces were subjected to bending under ad hoc loading

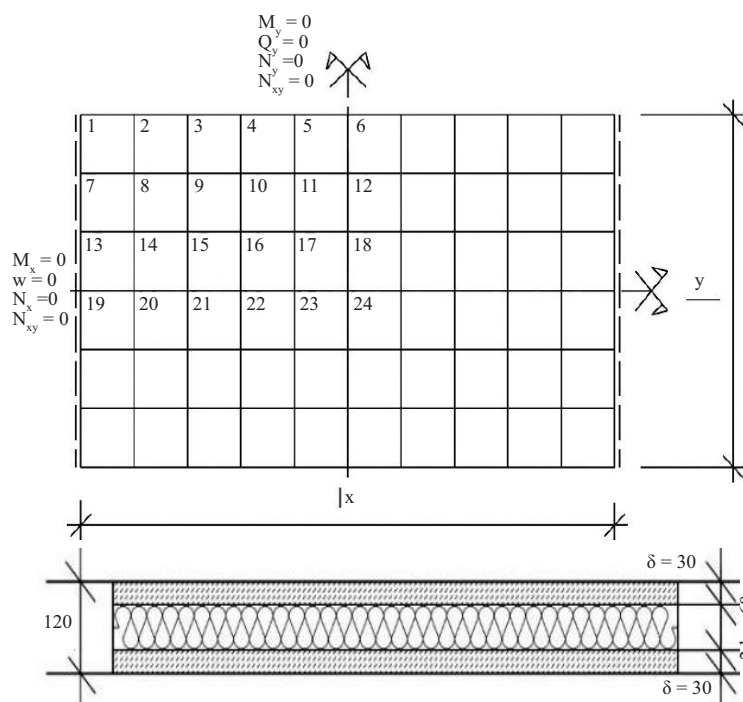


Fig. 1. Three-layer slab cross-section and adopted split grid for free-supported and free-edged slab

Rys. 1. Przekrój płyty trójwarstwowej i przyjęta siatka podziału w przypadku płyty o krawędziach swobodnie podpartych i krawędziach swobodnych

Poissona $\nu = 0$, co znacznie upraszcza funkcjonal energii odkształcenia sprężystego zginanej płyty. W pracy [2] zamieszczono porównanie rozwiązań trójwarstwowego pasma płytowego przy przyjęciu $\nu = 0$ i $\nu = 0.167$. Z analizy zamieszczonych rozwiązań wynikało, że uwzględnienie w obliczeniach $\nu = 0.167$ nie ma istotnego wpływu na rezultat obliczeń. W takim przypadku funkcjonal energii sprężystej zginanej płyty przyjmuje postać (2):

Poszukując funkcji u , v , w w postaci dyskretnych wartości w węzłach siatki podziału płyty, pochodne w funkcjonale (2) należy zastąpić odpowiednimi schematami różnicowymi. Szczegółowy sposób postępowania przy użyciu MRS, schematy różnicowe oraz zbudowaną macierz globalną na współczynnikach ogólnych omówiono w [13]. Korzystając z tej macierzy, utworzono układy równań przemieszczeniowych dotyczących płyt trójwarstwowych, w przypadku których zbudowano modele obliczeniowe o właściwościach podanych w tabeli 2. Za pomocą metody różnic skończonych, w przypadku parametrów betonów (variant I) wyznaczono ugięcie, siłę niszczącą i naprężenia rozciągające płyt trójwarstwową [13].

W celu weryfikacji wyników obliczeń numerycznych MRS i MES przeprowadzono badania eksperymentalne (fotografia). Płyty (variant I) o przekroju 600 x 1200 mm i grubości 120 mm (szt. 3) badano jako wolnopodparte na dwóch przeciwnych krawędziach, obciążone centralnie siłą skupioną. Elementy prób-

riacyjnego ujęcia metody różnic skończonych. Istotną zaletą metody wariacyjnego ujęcia różnic skończonych jest to, że w przyjętym układzie niewiadomych należy spełnić tylko geometryczne warunki brzegowe, a warunki statyczne są spełnione w sposób naturalny przez sam funkcjonal. Na każdym brzegu płyty trójwarstwowej wymagane jest spełnienie czterech warunków. Na rysunku 1 pokazano siatkę podziału obliczanej płyty oraz zaznaczono wcześniej opisane warunki brzegowe w przypadku płyty trójwarstwowej o krawędziach swobodnie podpartych i swobodnych.

W celu uproszczenia obliczeń, do dalszych rozważań przyjęto współczynnik

using the Hysdozok system, loading them continuously until failure while maintaining a constant rate of load increase according to RILEM TC-119-TCE. Aramis measuring system was also used in the tests. The test methodology, execution method and maintenance conditions of the test pieces are discussed in the paper [13].



General view of the three-layer slab test bench [13]
Ogólny widok stanowiska do badań płyt trójwarstwowych [13]

The path to obtaining a solution by the finite difference method (FDM) is labor-intensive, so it was decided to also perform calculations using the finite element method (FEM). Thus, the suitability of this method for slab analysis of the Hoff model was tested. The purpose of the FEM calculations was also to demonstrate the suitability of fine aggregate fiber composite manufactured with waste sands for making this type of slab (slab variant II and III). The static scheme and loading method of the three-layer slab were assumed as in the calculation example using the FEM method. The dimensions of the FEM mesh were assumed to be 25 x 25 mm, the top and bottom faces 30 mm thick, the middle 60 mm thick. Nonlinearity was introduced into the model by assuming that the bottom layer, which first undergoes scratching, suffers a 6-fold reduction in stiffness, and the middle layer suffers a 3-fold reduction.

Test results and their analysis

Selected experimental and analytical results are shown in Table 3 as well as Figures 2 and 3.

The slabs were loaded until failure. The observed failure mechanism showed no slippage in the interface between the layers of perlite concrete and plain concrete. The deflections of the slab increased gently. The mode of destruction of the sandwich slab was as expected. The destruction occurred in the center of the element, violently, a crack was heard. The design of the slab has served its purpose and prevents delamination of the faces and core and their slippage. Figures 2 and 3 show an example map of vertical displacement (deflection) of elements and tensile stresses in the bottom face layer for variants I and II of the three-layer slab, obtained by FEM calculations. The destruction of the variant I and II slab followed a similar pattern. In variant I of the slab, the

ne poddano zginaniu pod obciążeniem doraźnym przy użyciu systemu Hysdozok, obciążając je w sposób ciągły aż do zniszczenia z zachowaniem stałej prędkości wzrostu obciążenia wg RILEM TC-119-TCE. W badaniach zastosowano także system pomiarowy Aramis. Metodę badań, sposób wykonania i warunki pielęgnacji elementów próbnych omówiono w [13].

Droga do uzyskania rozwiązania metodą różnic skończonych (MRS) jest pracochłonna, dlatego postanowiono wykonać obliczenia także przy użyciu metody elementów skończonych (MES). Tym samym sprawdzono przydatność tej metody do analizy płyt modelu Hoffa. Celem obliczeń metodą MES było także wykazanie przydatności drobnokruszowego fibrokopozytu wytworzonego przy użyciu piasków odpadowych do wykonania tego rodzaju płyt (wariant II i III). Schemat statyczny i sposób obciążenia płyty trójwarstwowej przyjęto metodą MRS, jak w przykładzie obliczeniowym. Założono wymiary siatki MES 25 x 25 mm, górna i dolna płyta grubości 30 mm, środkowa 60 mm. Nieliniowość wprowadzono do modelu, przyjmując założenie, że dolna warstwa, która pierwsza ulega zarysowaniu, doznaje sześciokrotnej redukcji sztywności, a warstwa środkowa trzykrotnej.

Wyniki badań i ich analiza

Wybrane wyniki badań doświadczalnych i analitycznych przedstawiono w tabeli 3 oraz na rysunkach 2 i 3.

Płyty były obciążane aż do zniszczenia. Nie stwierdzono poślizgu w styku między warstwami perlitobetonu i betonu zwykłego. Ugięcie płyty narastało łagodnie. Sposób zniszczenia płyty warstwowej był zgodny z przewidywaniem. Zniszczenie nastąpiło gwałtownie w środku elementu i było słyszalne pęknięcie. Konstrukcja płyty spełnia swoje zadanie, gdyż uniemożliwia rozwarstwienie okładzin i rdzenia oraz ich poślizg. Na rysunku 2 i 3 pokazano przykładową mapę przemieszczeń pionowych (ugięcia) elementów i naprężeń rozciągających w warstwie okładziny dolnej wariantów I i II płyty trójwarstwowej, otrzymaną w wyniku obliczeń metodą MES. Zniszczenie płyty wariantu I i II przebiegało podobnie. W wariantcie I, po wystąpieniu zarysowania w okładzinie z betonu zwykłego, następowała redystrybucja pęknięcia na rdzeń płyty z perlitobetonu, a także pęknięcie rdzenia i zniszczenie elementu. W wariantcie II, po przekroczeniu wytrzymałości na rozciąganie przy zginaniu

Table 3. Calculation results obtained by MRS and FEM methods and from experimental studies

Tabela 3. Wyniki obliczeń uzyskane metodą MRS i MES oraz z badań eksperymentalnych

Analyzed property (mean values)/ Analizowana właściwość (wartości średnie)	Variant I slab/Płyta wariant I			Variant II slab/ Płyta wariant II	Variant III slab /Płyta wariant III
	FDM calculation results/wyniki obliczeń MRS	FEM calculation results/wyniki obliczeń MES	experimental studies/badania eksperymentalne	FDM calculation results/wyniki obliczeń MES	
Deflection $a_{\max}$ [mm]/Ugięcie $a_{\max}$ [mm]	0,48	0,46	0,47	0,26	0,37
Failure force F_n [kN]/Siła niszcząca F_n [kN]	18,0	17,0	17,4	32,2	29,1
Max. tensile stress $\sigma_{\max}$ [MPa]/Maksymalne naprężenie rozciągające $\sigma_{\max}$ [MPa]	3,03	2,8	2,66	7,3	2,8

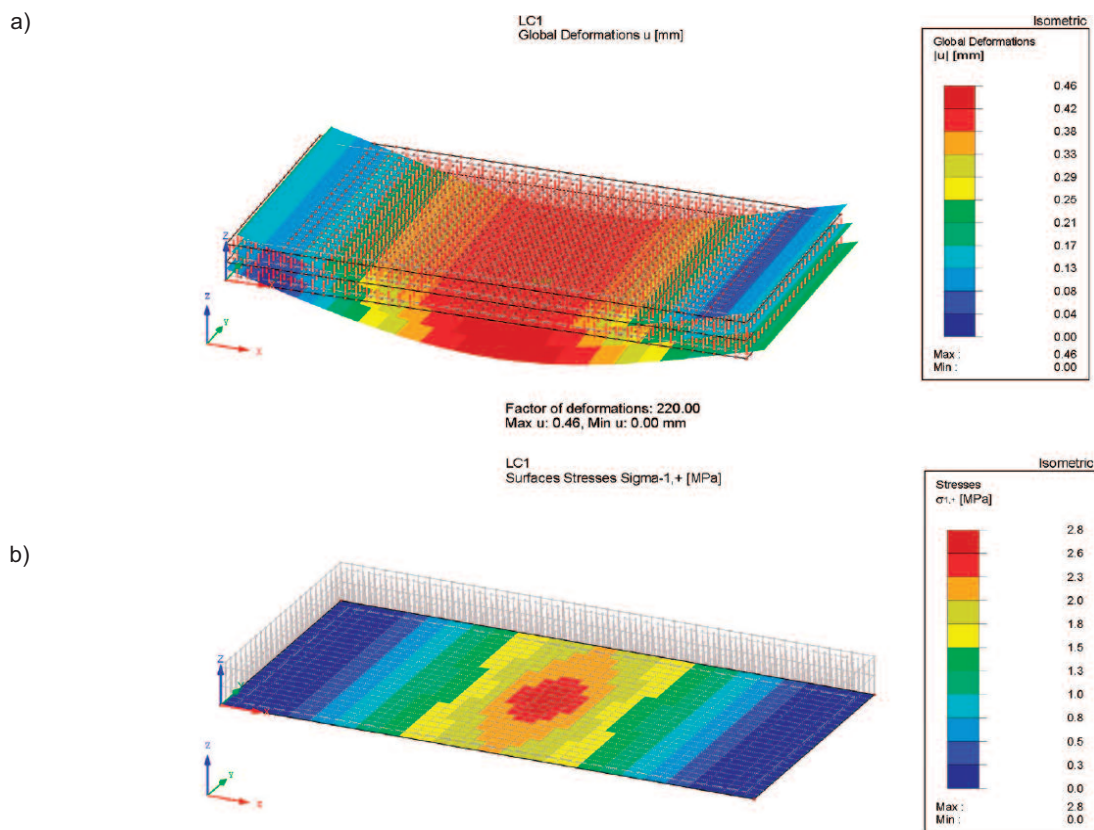


Fig. 2. Map of (a) deflections of the three-layer slab, and (b) tensile stresses in ordinary concrete cladding – variant I
Rys. 2. Mapa (a) ugięć płyty trójwarstwowej oraz (b) naprężeń rozciągających w okładzinie z betonu zwykłego – wariant I

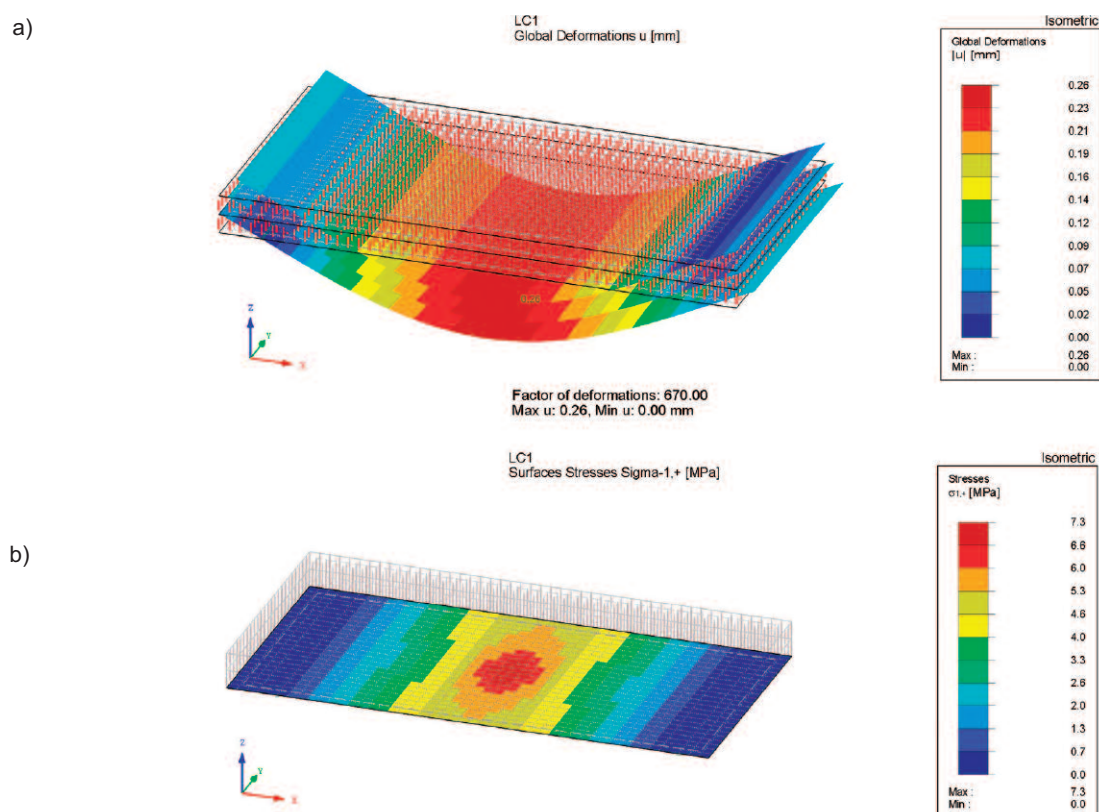


Fig. 3. Map of (a) deflections of the three-layer slab, and (b) tensile stresses in a fibrocomposite cladding – variant II
Rys. 3. Mapa (a) ugięć płyty trójwarstwowej oraz (b) naprężeń rozciągających w okładzinie z fibrokompozytu – wariant II

occurrence of a scratch in the plain concrete face was followed by redistribution of the crack to the core of the perlite concrete slab, cracking of the core and failure of the element. In variant II, after the flexural tensile strength of the fiber composite was exceeded and a scratch occurred in the bottom face, the slab failed without much (visible) crack redistribution to the perlite concrete core. After the scratching of the face, cracking of the slab core and top face occurred.

Comparing the values of deflection (a_{max}), tensile stress (σ_{tmax}) and failure force (F_n) of the variant I slab, obtained by FDM and FEM methods and experimental tests, (see Figure 3 and Table 3), their agreement was good. For example, in the case of FEM calculations, the value of the a_{max} deflection of the slab is about 5% less than that determined by the FDM method and about 2% less compared to the deflection obtained experimentally. The concordance of analytical and experimental results indicates the suitability of both numerical methods for calculating Hoff model slabs. However, it should be mentioned that in the case of FDM the path to the solution is more complicated than in FEM.

A comparison of the results of calculations obtained by FEM for all variants of the slabs shows that in the case of a component with faces made of fiber composite and with a core of perlite concrete (variant II), the failure occurred at a force about 47% higher than in the case of faces made of plain concrete (variant I) and about half the deflection. This relationship is confirmed by the higher strength and ductility of the fine aggregate fiber composite compared to plain concrete [15]. Using a core of fiber composite and plain concrete faces also results in a higher slab bearing capacity (about 42%) with less deflection than in variant I (about 33%). Variant III did not prove as favorable as II, but the slab deflections and the level of failure loads were much more favorable than for variant I. After a crack formed in the bottom face layer of plain concrete, at a stress of 2.8 MPa, the crack was transferred to the fiber composite core, which took over the load. When the flexural tensile strength was reached, at a force equal to 29.1 kN, the slab failed.

In summary, in terms of load-bearing capacity and serviceability, the most favorable slab was the one with faces made of fine aggregate fiber composite and its core made of perlite concrete.

Conclusions

The variational finite difference method, used successfully in isotropic plate theory, is suitable for solving the problems relating to Hoff's three-layer slabs. Similar results can also be obtained using the finite difference method, but the calculations made using the FDM are more labor-intensive and therefore time-consuming. Experimental studies have shown agreement with the results of calculations obtained by FEM and FDM methods.

The use of a fine-aggregate fiber composite made on the basis of waste sands as a material for the faces or core of the slab will significantly increase its load-bearing capacity and serviceability. Taking into account the mechanical and physical properties of the fine-aggregate fiber composite, as well as the results of tests of shear capacity and flexural strength, it can be assumed that it will prove useful as a structural material used

fibrokompozytu i pojawieniu się zarysowania w okładzinie dolnej płyta uległa zniszczeniu bez widocznego przeniesienia rysy na rdzeń z perlitobetonu. Po zarysowaniu okładziny wystąpiło pęknięcie rdzenia płyty i okładziny górnej.

Porównując wartości ugięcia (a_{max}), naprężenia rozciągającego (σ_{tmax}) i siły niszczącej (F_n) płyty wariantu I, uzyskane metodami MRS i MES oraz w badaniach eksperymentalnych (rysunek 3, tabela 3), stwierdzono dobrą ich zgodność. W przypadku obliczeń MES wartość ugięcia a_{max} płyty jest o ok. 5% mniejsza niż wyznaczona metodą MRS i o ok. 2% mniejsza w porównaniu z ugięciem uzyskanym w eksperymencie. Zgodność wyników obliczeń analitycznych i badań doświadczalnych wskazuje na przydatność obu metod numerycznych do obliczania płyt modelu Hoffa. Należy jednak nadmienić, że w przypadku MRS droga do uzyskania rozwiązania jest bardziej skomplikowana niż MES.

Z porównania wyników obliczeń dotyczących wszystkich wariantów płyt uzyskanych MES wynika, że w przypadku elementu z okładziną wykonaną z fibrokompozytu i z rdzeniem z perlitobetonu (wariant II) zniszczenie nastąpiło przy sile o ok. 47% większej niż w przypadku okładzin z betonu zwykłego (wariant I) i o ok. połowę mniejszym ugięciu. Zależność ta znajduje potwierdzenie w większej wytrzymałości i ciągliwości drobnokruszywowego fibrokompozytu w porównaniu z betonem zwykłym. Stosując rdzeń z fibrokompozytu, a okładzinę z betonu zwykłego, uzyskuje się również większą ok. 42% nośność płyty przy mniejszym ok. 33% ugięciu niż w wariantcie I. Wariant III nie okazał się tak korzystny jak II, ale ugięcie płyty i poziom obciążeń niszczących były znacznie korzystniejsze niż w przypadku wariantu I. Po powstaniu rysy w warstwie okładziny dolnej z betonu zwykłego, przy naprężeniu równym 2,8 MPa, rysa została przeniesiona na rdzeń z fibrokompozytu, który przejął obciążenie. Po osiągnięciu wytrzymałości na rozciąganie przy zginaniu, przy sile równej 29,1 kN nastąpiło zniszczenie płyty.

Pod względem nośności i użyteczności najkorzystniejsza okazała się płyta, której okładzina wykonana jest z drobnokruszywowego fibrokompozytu, a jej rdzeń z perlitobetonu.

Podsumowanie

Metoda wariacyjnego ujęcia różnic skończonych, stosowana z powodzeniem w teorii płyt izotropowych, nadaje się również do płyt trójwarstwowych wg modelu Hoffa. Podobne rezultaty można też uzyskać, stosując metodę różnic skończonych, przy czym obliczenia wykonane przy użyciu MRS są bardziej pracochłonne, a tym samym czasochłonne. Badania eksperymentalne wykazały zgodność z wynikami obliczeń uzyskanych metodami MES i MRS.

Zastosowanie drobnokruszywowego fibrokompozytu, wytworzonego na bazie piasków odpadowych, jako materiału na okładzinę lub rdzeń płyty, znacznie zwiększy jej nośność i użyteczność. Biorąc pod uwagę właściwości mechaniczno-fizyczne drobnokruszywowego fibrokompozytu oraz wyniki badań nośności na ścinanie i nośności na zginanie, można przypuszczać, że sprawdzi się on jako materiał konstrukcyjny do wykonywania elementów płytowych. Dzięki swoim właściwościom może więc, w niektórych przypadkach, stanowić alternatywę betonu

to manufacture slab elements. Thus, owing to its properties, it can, in some cases, be an alternative to plain concrete for making three-layer floor slabs according to the Hoff's model.

Hoff three-layer slabs can be successfully used, as modern solutions for floor systems. For the faces of three-layer slabs, a fine aggregate fiber composite based on waste sands or plain concrete can be used, but this will provide a much lower load-bearing capacity for such a slab. Perlite concrete or other traditional insulating materials, such as polystyrene or foam glass, can be used for the core. Concrete faces can be reinforced conventionally, using steel or non-metallic reinforcement, and it can also be made as fiber concrete without conventional reinforcement for insignificant slab service loads, or reduce the reinforcement according to the proportion of distributed reinforcement. It is also significant that three-layer slabs can be manufactured conventionally in molds, on vibrating tables or even, as prestressed slabs.

Owing to the appropriately selected component materials for the faces and core, the three-layer structure can be classified as a structure with near-optimal solutions, in which each component contributes to the best properties of the whole structure under the given conditions.

The three-layer slabs used in the model tests confirmed that it is possible to construct a slab floor element that meets the load-bearing requirements with the right materials, while being high-finished. By analyzing the properties of the constituent materials of the slab, it can be assumed that it will also meet the requirements of thermal and acoustic insulation. Such floor slabs have better technical parameters than previously used floor system solutions, and any materials can be used for which strength parameters should be determined. Appropriate selection of component materials enables to obtain an element that makes optimal use of their properties.

Received: 20.01.2025

Revised: 10.03.2025

Published: 23.07.2025

zwykłego w przypadku wykonywania stropowych płyt trójwarstwowych wg modelu Hoffa. Płyty te mogą być z powodzeniem stosowane jako nowoczesne rozwiązania systemów stropowych.

Do wykonania okładzin płyt trójwarstwowych można zastosować fibrokompozyt drobnokruszywowy na bazie piasków odpadowych lub beton zwykły, który jednak zapewni znacznie mniejszą nośność płyty. Na rdzeń można wykorzystać perlitobeton lub inne tradycyjne materiały izolacyjne, jak styropian czy szkło piankowe. Okładziny betonowe mogą być zbrojone tradycyjnie z wykorzystaniem zbrojenia stalowego lub niemetalicznego, a także wykonywane jako fibrobetonowe bez zbrojenia konwencjonalnego, przy niedużych obciążeniach użytkowych płyt, lub ze zredukowanym zbrojeniem stosownie do udziału zbrojenia rozproszonego. Ważne jest też to, że płyty trójwarstwowe można wykonywać w sposób tradycyjny w formach, na stołach wibracyjnych lub nawet jako sprężone.

Dzięki odpowiednio dobranym materiałom składowym na okładziny i rdzeń konstrukcję trójwarstwową można zaliczyć do konstrukcji o rozwiązaniach prawie optymalnych, w których każdy element składowy przyczynia się do uzyskania najlepszych w danych warunkach właściwości całej struktury.

Płyty trójwarstwowe użyte do badań modelowych potwierdziły, że można skonstruować element płytowy, stropowy, który przy zastosowaniu odpowiednich materiałów spełnia wymagania nośności, a jednocześnie ma duży stopień wykończenia. Analizując właściwości materiałów składowych płyty, stwierdzono, że spełni ona również wymagania izolacyjności termicznej i akustycznej. Takie płyty stropowe mają lepsze parametry techniczne od dotychczas stosowanych, a do ich wykonania można użyć dowolnych materiałów, w przypadku których należy określić parametry wytrzymałościowe. Dzięki odpowiedniemu doborowi materiałów składowych można otrzymać element optymalnie wykorzystujący ich właściwości.

Artykuł wpłynął do redakcji: 20.01.2025 r.

Otrzymano poprawiony po recenzjach: 10.03.2025 r.

Opublikowano: 23.07.2025 r.

Literature

- [1] Hoff N.J. Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates. NACA 1950; No.2225.
- [2] Buczkowski W. Numeryczne obliczanie płyt trójwarstwowych stosowanych w budownictwie rolniczym. Praca doktorska. Akademia Rolnicza we Wrocławiu. Wrocław 1977.
- [3] Mikołajczak H, Buczkowski W, Łęcki W, Wosiewicz B. Stropowe płyty trójwarstwowe dla budynków inwentarskich. Roczniki Akademii Rolniczej w Poznaniu 1975; LXXVII.
- [4] Buczkowski W. Analiza numeryczna płyt warstwowych. Archiwum Inżynierii Lądowej. 1981; tom XXVII. Z.1/1981.
- [5] Boniecki P, Graffunder W. Komputerowa symulacja zagadnienia deformacji płyty trójwarstwowej. Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej w Krakowie. Mechanizacja i Energetyka Rolnictwa. 1989; t. 7, s. 11–20.
- [6] Boniecki P, Dworecki Z, Loboda M. The Sandwich Plate Deformation with Stochastic Structure. Prace Przemysłowego Instytutu Maszyn Rolniczych. 1997; t. 42, nr 2, s. 49–51.
- [7] Boniecki P, Mueller W, Weres J. Random Deformation of a Three-Layer Hoff Plate with Stochastic Parameters. Prace Przemysłowego Instytutu Maszyn Rolniczych. 2000; t. 45, nr 2, s. 67–69.
- [8] Boniecki P, Dworecki Z. Ocena wpływu losowości cech wypełniacza płyty trójwarstwowej na charakter rozkładu prawdopodobieństwa wektora deformacji obciążonej płyty. Prace Przemysłowego Instytutu Maszyn Rolniczych. 1995; t. 40, nr 4, s. 53–57.

- [9] Magnucki K, Ostwald M. (red.) Stateczność i optymalizacja konstrukcji trójwarstwowych, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2001. Poznań–Zielona Góra.
- [10] Staszak N, Szymczak-Graczyk A, Garbowski T. Elastic Analysis of Three-Layer Concrete Slab Based on Numerical Homogenization with Analytical Shear Correction Factor. Applied Sciences. 2022; <https://doi.org/10.3390/app12199918>.
- [11] Staszak N, Garbowski T, Szymczak-Graczyk A. Solid Truss to Shell Numerical Homogenization of Prefabricated Composite Slabs. Materials 2021; <https://doi.org/10.3390/ma14154120>.
- [12] Wachowiak J, Wilde P. Wolnopodparte prostokątne płyty trójwarstwowe. Archiwum Inżynierii Lądowej. 1966; t. 12, z. 1, s. 71–90.
- [13] Sadowska-Buraczewska B. Stropowe płyty trójwarstwowe modelu Hoffa. Zastosowanie, obliczenia statyczne, weryfikacja doświadczalna obliczeń numerycznych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej. 2023. ISBN 978-83-67185-78-3.
- [14] Grabiec AM, Głodkowska W. Some Remarks on New Trends in Using Waste Aggregates in Civil Engineering: An Overview. Sustainability. 2025, 17, 233.
- [15] Lehmann M, Głodkowska W. Capacity and Behaviour of Bending Reinforced Concrete Beams Made of Steel Fibre-Reinforced Waste Sand Concrete. Materials. 2021; <https://doi.org/10.3390/ma14112996>.
- [16] Głodkowska W, Lehmann M. Nośność i okształcenia strefy przypodporowej belek wykonanych z drobnokruszywowego fibrokompozytu. Materiały Budowlane. 2024; (9): 1 ÷ 6.