

dr hab. inż. Monika Podwórna, prof. uczelni^{1*)}

ORCID: 000-0002-1967-0384

dr inż. Jacek Groseł¹⁾

ORCID: 0000-0002-4815-1719

Tłumienie drgań konstrukcji poddanej obciążeniu dynamicznemu

Vibration damping of a structure subjected to dynamic excitation

DOI: 10.15199/33.2022.11.31

Streszczenie. W artykule opisano analizę belki obciążonej dynamicznie jako modelu zabytkowej konstrukcji mostowej, w której zastosowano tłumik drgań zmniejszający wyężenie konstrukcji przez redukcję drgań belki mostowej, które są wywołane działaniem stochastycznego strumienia sił poruszających się ze stałą prędkością. Wartość każdej z sił oraz czas między ich działaniem są traktowane jako zmienne losowe. Rozważono kilka kryteriów optymalizacji ugięcia belki mostowej z zamontowanym absorberem o różnych parametrach.

Słowa kluczowe: analiza dynamiczna; redukcja drgań; losowe drgania; proces Poissona.

Abstract. This paper describes an example of a historic bridge structure in which a vibration damper is used to reduce the strain on the structure by reducing the vibrations of the bridge beam, which are caused by the action of a stochastic stream of forces moving at a constant speed, where each force and the times between arrival of the forces are treated as random variables. Several optimisation criteria were considered, based on measures of the variability of the random deflection of a bridge beam with an absorber installed with different parameters.

Keywords: dynamic analysis; vibration absorber; random vibration; Poisson process.

Obiekty mostowe, jak wszystkie budowle, podlegają procesom degradacji. W pracy [1] przedstawiono propozycję klasyfikacji czynników związanych ze zjawiskami degradacji żelbetowych obiektów mostowych. Podkreślono w niej, że powstające uszkodzenia są efektem działania zindywidualizowanych i z reguły skomplikowanych procesów degradacyjnych angażujących również oddziaływania zewnętrzne, jak np. w przypadku mostów zbyt duże drgania wywołane poruszającymi się pojazdami, nazywanymi stymulatorami degradacji.

Absorbery drgań (masowe tłumiki drgań; dynamic vibration absorbers DVAs; tuned mass dampers TMDs) są popularnymi rozwiązaniami zmniejszającymi drgania konstrukcyjne. Dzięki ich zastosowaniu modyfikacji ulega schemat dynamiczny konstrukcji. Największą zaletą absorberów jest ich mały rozmiar. W związku z tym można je montować w takim miejscu, aby były niewidoczne. Jest to istotne szczególnie w przypadku modernizacji obiektów zabytkowych, w których konieczne jest zachowanie wyglądu. Absorbery są również wykorzystywane na etapie koncepcji projektu nowego obiektu budowlanego, przede wszystkim jako rozwiązanie do realizacji lekkich konstrukcji o dużej rozpiętości, które są często wrażliwe na obciążenia dynamiczne ze względu na niską częstotliwość własną i niskie tłumienie systemu. Zagadnienie jest istotne nie tylko ze względu na komfort użytkownika, ale również bezpieczeństwo konstrukcji. Dzięki tłumikom drgań możliwa jest zmiana parametrów dynamicznych konstrukcji i w efekcie zmniejszenie amplitudy drgań szczególnie w przypadku rezonansu. Prawidłowa prognoza pracy konstrukcji pod zadaniem obciążeniem dynamicznym jest kluczowa, gdyż przewidując zachowanie konstrukcji, można wprowadzić rozwiązania naprawcze [2].

¹⁾ Politechnika Wroclawska, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego

^{*)} Adres do korespondencji: monika.podworna@pwr.edu.pl

Typowy absorber składa się z wibrującej masy, która stanowi pewną część całkowitej masy mostu i w najprostszym przypadku jest podtrzymywana przez sprężyny śrubowe z równoległymi tłumikami wiskotycznymi. Częstotliwość drgań własnych TMD jest dostrojona do częstotliwości drgań własnych konstrukcji, w przypadku której należy zwiększyć tłumienie systemu. Zasada działania absorberów jest prosta: jeśli drgania są wzbudzone w konstrukcji, to TMD również drga, ale z pewnym przesunięciem fazowym w stosunku do drgań konstrukcji. To przesunięcie fazowe ruchów prowadzi do kompensacji obciążeń, co skutkuje zmniejszeniem amplitudy drgań.

Temat masowych tłumików drgań jest dobrze rozpoznany w literaturze. Badacze przyjmują wzbudzenie konstrukcji podstawowej jako proces deterministyczny albo losowy. Przeprowadzono wiele badań w celu optymalizacji parametrów projektowych, a tym samym maksymalizacji wydajności absorberów drgań. W związku tym, że pierwsza postać drgań własnych konstrukcji najczęściej w sposób dominujący wpływa na przemieszczenia obiektu, TMD jest zwykle dostrojony do pierwszej częstości własnej konstrukcji. Główne parametry DVA to współczynnik strojenia, czyli stosunek częstości absorbera do częstości własnej konstrukcji bez tłumika oraz współczynnik masy absorbera do masy własnej konstrukcji.

Do najważniejszych problemów dynamiki konstrukcji z wiskotycznymi i lepkosprężystymi tłumikami drgań zalicza się modelowanie tłumików, identyfikację parametrów modeli tłumików, opis konstrukcji z tłumikami, wyznaczanie charakterystyk dynamicznych konstrukcji z tłumikami drgań oraz optymalizację położenia tłumików w konstrukcji [3].

W artykule analizowany jest problem doboru optymalnego położenia absorbera redukującego drgania belki mostowej poddanej działaniu stochastycznego strumienia sił poruszających się ze stałą prędkością, gdzie każda z sił jest traktowana jako zmienna losowa. Ponadto czas między działaniem tych

sił jest traktowany również jako zmienna losowa. Właściwości obciążenia są modelowane za pomocą filtrowanego procesu Poissona z wykorzystaniem dynamicznej funkcji wpływu [4]. Do analiz przyjęto dynamiczny absorber drgań (DVA) o jednym stopniu swobody (SDOF) oraz model konstrukcji pierwotnej o wielu stopniach swobody (MDOF). Rozważono kilka kryteriów optymalizacji, bazując na wartościach oczekiwanych i wariancji odpowiedzi belki.

Analizowany problem

Rozważane jest tłumienie drgań swobodnie podpartej belki Eulera-Bernoulliego o skończonej długości L_0 z zamontowanym punktowo absorberem, w dowolnym miejscu na długości belki, w odległości x_A od lewego jej końca $-x_A \in (0, L_0)$. Drgania belki mostowej obciążonej strumieniem sił poruszających się ze stałą prędkością v opisane są równaniem [5]:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + r(t) \delta(x-x_A) = \sum_{k=1}^{N(t)} A_k \delta[x-v(t-t_k)] \quad (1)$$

gdzie:

- EI – sztywność belki na zginanie;
- m – masa na jednostkę długości belki;
- c – współczynnik tłumienia δ będący funkcją delty Diraca;
- r(t) – siła oddziaływania absorbera na belce.

Z warunku równowagi sił działających w obrębie absorbera wynika, że r(t) jest równe sile bezwładności działającej na masę tłumika:

$$r(t) = -M_a \frac{d^2 q_a(t)}{dt^2} \quad (2)$$

gdzie: M_a, q_a – odpowiednio masa i przemieszczenie absorbera.

Przyjęto, że amplitudy wartości sił A_k są zmiennymi losowymi, które są zarówno wzajemnie niezależne, jak i niezależne od losowych chwil t_k . Zakłada się, że wartości oczekiwane $E[A_k] = E[A] = \text{const}$ są znane. Losowe czasy t_k stanowią proces Poissona $N(t)$ o parametrze λ . Po wprowadzeniu klasycznych warunków brzegowych oraz dwóch dynamicznych funkcji wpływu $-H_1(x, t)$ i $H_2(x, t - L_0/v)$ wraz z warunkami początkowymi można zapisać ugięcie belki $w_1(x, t)$ w dowolnym czasie t oraz przy dowolnym położeniu siły, za pomocą całki Stieltjesa [5]:

$$w_1(x, t) = \int_{t-L_0/v}^t A(\tau) H_1(x, t-\tau) dN(\tau) + \int_{t_0}^{t-L_0/v} A(\tau) H_2(x, t-\tau-L_0/v) dN(\tau) \quad (3)$$

Funkcja $H_1(x, t)$ jest odpowiedzią belki w czasie $t \in < 0, L_0/v >$ na ruchomą siłę równą jedności ($A_k = 1$), a funkcja $H_2(x, t - L_0/v)$ jest odpowiedzią układu bez wzbudzenia ruchomymi siłami, ale z niezerowymi warunkami początkowymi – jest to czas, gdy siła już nie działa na belkę.

Przyjęto następujące parametry losowych funkcji ugięć belki konstrukcyjnej:

- wartość oczekiwana [6]

$$E[w_1(x, \infty)] = E[A] \lambda \int_0^{L_0/v} H_1(x, \tau) d\tau + E[A] \lambda \int_{L_0/v}^{\infty} H_2(x, t-\tau-L_0/v) d\tau = E[A] \lambda E[w_1(x, t)] \quad (4)$$

- moment j-go rzędu [7]

$$\mu_{j,1}(x, \infty) = E[A^j] \lambda \int_0^{L_0/v} H_1^j(x, \tau) d\tau + E[A^j] \lambda \int_{L_0/v}^{\infty} H_2^j(x, t-\tau-L_0/v) d\tau \quad (5)$$

- wariancja – moment dla $j = 2$, czyli

$$\mu_{j,1}(x, \infty) = \mu_{2,1}(x, \infty) = E[A^2] \lambda \sigma_1^2(x, \tau) \quad (6)$$

- kurtოza [7]

$$Kurt[w_1(x, \infty)] = \frac{\mu_{4,1}(x, \infty)}{[\mu_{2,1}(x, \infty)]^2} - 3 = \frac{\mu_{4,1}(x, t)}{[\sigma_1^2(x, t)]^2} - 3 \quad (7)$$

W przypadku konstrukcji ciągłej, o nieskończeniu wielu stopniach swobody (IDOF), przyjęto dynamiczną funkcję wpływu w postaci szeregu sinusoidalnego, zastosowano metodę ortogonalności oraz ograniczono liczbę stopni swobody do ζ . Otrzymano następujący układ równań zwyczajnych:

$$\frac{d^2 y_{1n}(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy_{1n}(t)}{dt} + \omega_n^2 y_{1n}(t) - M_a \frac{d^2 q_a(t)}{dt^2} \sin \frac{n\pi x_A}{L_0} = \frac{2}{m L_0} \sin \frac{n\pi v t}{L_0} \quad (8)$$

$$\frac{d^2 y_{2n}(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy_{2n}(t)}{dt} + \omega_n^2 y_{2n}(t) - M_a \frac{d^2 q_a(t)}{dt^2} \sin \frac{n\pi x_A}{L_0} = 0 \quad (9)$$

gdzie:

funkcje $y_{1n}(t)$ i $y_{2n}(t)$ opisują drgania belki z n-tą częstością własną; $y_{1n}(t)$ gdy siła jest na belce, a $y_{2n}(t)$, gdy obciążenie dynamiczne nie działa już na belkę; $2\alpha = c/m'$; $\omega_n^2 = (n\pi/L_0)^4 EI/m$, $n = 1, 2, \dots, \zeta$.

Drgania absorbera o jednym dynamicznym stopniu swobody (SDOF), o parametrach M_a, c_a, k_a , przymocowanego do belki ciągłej o długości L_0 , w przypadku ζ – pierwszych postaci własnych mają postać:

$$\frac{d^2 q_a(t)}{dt^2} + 2 \frac{c_a}{M_a} \left[\frac{dq_a(t)}{dt} - \sum_{n=1}^{\zeta} \frac{dy_{in}(t)}{dt} \sin \frac{n\pi x_A}{L_0} \right] + \frac{k_a}{M_a} \left[q_a(t) - \sum_{n=1}^{\zeta} y_{in}(t) \sin \frac{n\pi x_A}{L_0} \right] = 0 \quad (10)$$

gdzie:

- $q_a(t)$ – przemieszczenie absorbera połączonego z belką;
- M_a – masa absorbera,
- c_a – współczynnik tłumienia;
- k_a – sztywność sprężyny tłumika;
- $i = 1, 2$.

W ten sposób otrzymano dwa oddzielne układy równań różniczkowych zwyczajnych, w których rozwiązania uzyskano przez całkowanie numeryczne z użyciem procedur systemu Wolfram Mathematica [8]. Oprogramowanie to używa standardowo metody Rungego-Kutty, dobierając automatycznie krok całkowania. W obliczeniach ograniczono maksymalny krok całkowania do jednej tysięcznej czasu przejazdu.

Kryteria optymalizacji i niezawodności

Kwestia optymalizacji parametrów absorbera była rozważana w wielu opracowaniach już pod koniec XX wieku, np. [9, 10]. Nie zawsze jest możliwe analityczne rozwiązanie problemu, szczególnie w przypadku obciążeń stochastycznych. Ponadto przyjmuje się różne kryteria optymalizacji. Rozwiązanie problemu optymalizacji zależy zarówno od prędkości ruchu siły, jak i parametrów belki.

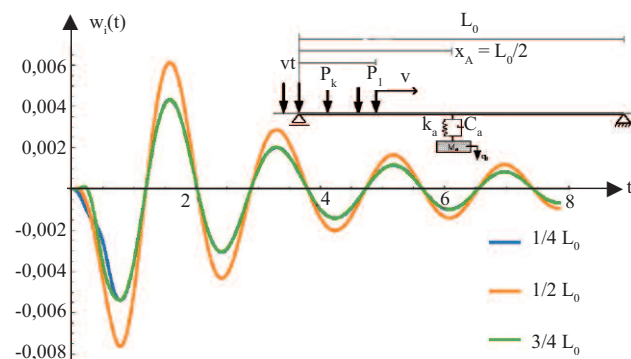
W artykule przyjęto następujące kryteria optymalizacji: minimalizację wartości oczekiwanej przemieszczenia wybranego punktu belki wraz z wariancją [5] oraz maksymalizację ujemnej wartości kurtოzy (wartość im bliższa zeru, tym lepiej, gdyż wyniki są mniej zróżnicowane, tj. mniejsze ryzyko pojawienia się pojedynczego dużego ugięcia).

Przykład analizy numerycznej

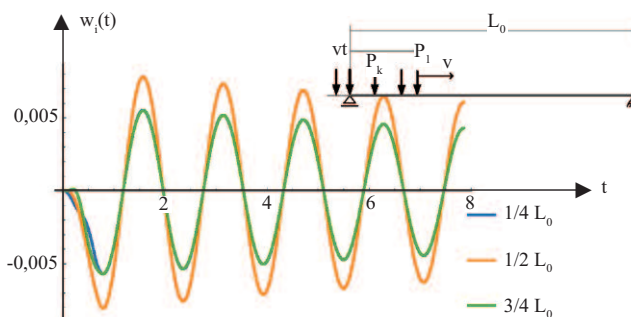
Przyjęta do analizy belka swobodnie podparta jest modelem drogowego żelbetowego mostu belkowego o rozpiętości teoretycznej $L_0 = 30$ m, w którym pierwsza częstość własna wynosi $\omega_s = 4$ rad/s. Po przeanalizowaniu – pod kątem względnego błędu obliczeń – używanych w analizie numerycznej 3 – 20 form własnych stwierdzono, że do dalszych obliczeń wystarczy przyjąć 5 form własnych [5], tj. $\zeta = 5$ we wzorze (10). Analizie poddano różne usytuowanie absorbera na długości belki. Przyjęto stałą prędkość poruszających się pojazdów, którą porównywano z prędkością krytyczną $v_{cr} = \pi\sqrt{EI/mL_0^2}$.

Na rysunku 1 przedstawiono funkcję ugięcia belki mostowej w trzech charakterystycznych miejscach podczas pracy absorbera o parametrach $\mu = M_a/mL_0 = 0,05$ i $\kappa = \omega_a/\omega_s = 1$, usytuowanego w połowie rozpiętości belki, tj. $x_A = L_0/2$. Porównując wykresy na rysunkach 1 oraz 2, można zauważyć wyraźną pracę absorbera, tzn. ugięcia belki mostowej są znacznie mniejsze, zwłaszcza gdy siły modelujące pojazdy opuszczają belkę mostową (na rysunkach 1 i 2 czas działania siły poruszającej się z prędkością równą prędkości krytycznej $v = v_{cr} = 137,5$ km/h wynosił 0,78 s).

Jak pokazano na rysunku 1, ugięcie belki w jednej czwartej jej długości po lewej i prawej stronie jest prawie identyczne po upływie czasu przejazdu pojazdu. Niewielkie zmiany widoczne są na początku obserwacji – położenie w pierwszej połowie, licząc od wjazdu pojazdu jest nieznacznie większe na początku przejazdu, potem nieznacznie mniejsze, a gdy pojazdy zjechały z mostu, wartości są identyczne. Podobną sytuację można zaobserwować



Rys. 1. Przebieg czasowy drgań wybranych punktów belki mostowej z absorberem o parametrach $\mu = 0,05$, $\kappa = 1$ zamontowanym w połowie belki
Fig. 1. Time history of vibration in selected points on the bridge beam with the absorber with the parameters $\mu = 0,05$, $\kappa = 1$ installed in the midspan of the beam



Rys. 2. Przebieg czasowy drgań wybranych punktów belki mostowej bez zamontowanego absorbera
Fig. 2. Time history of vibration in selected points on the bridge beam without any absorber

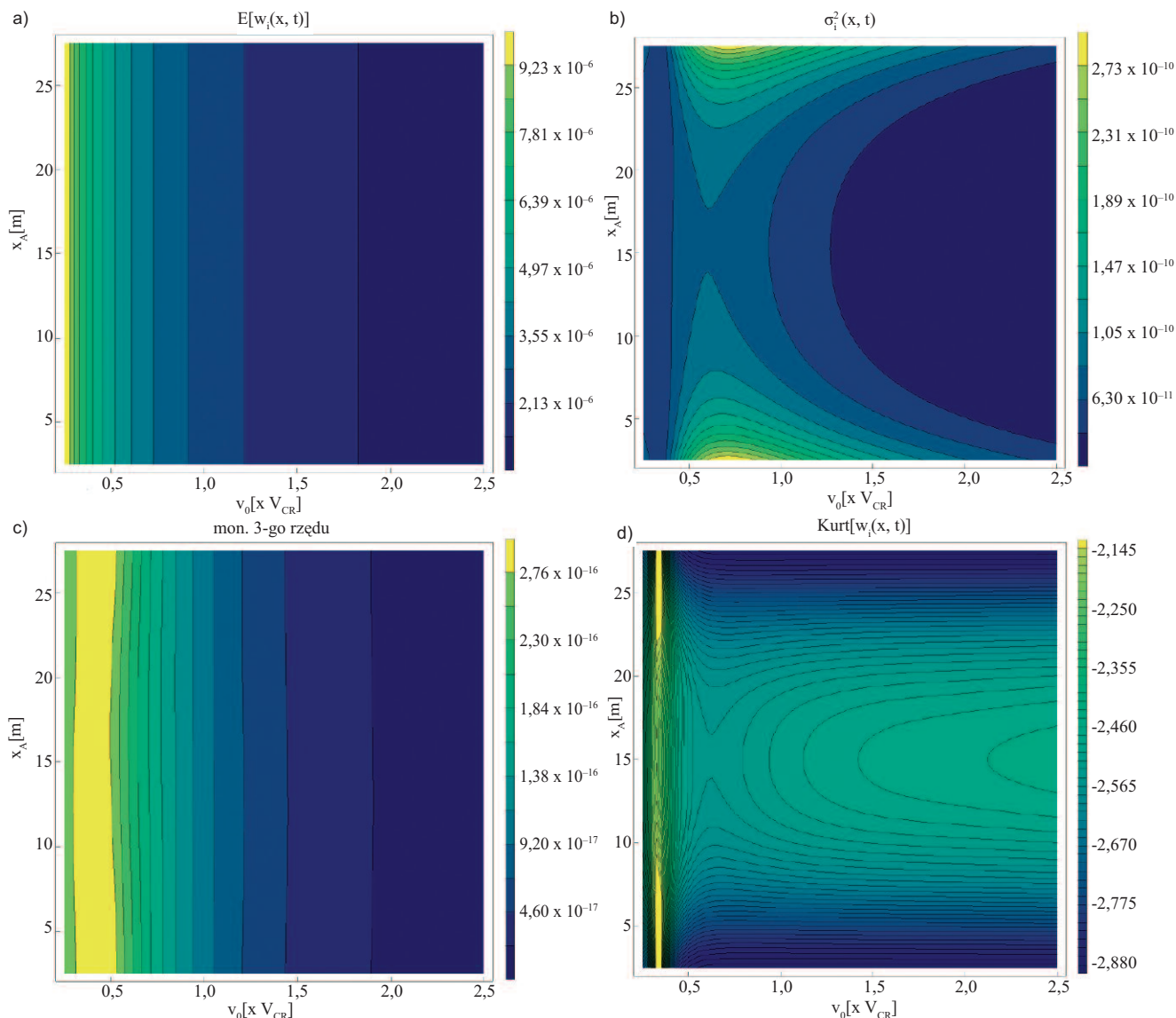
w przypadku konstrukcji bez absorbera (rysunek 2). Oczywiście jest, że ugięcie w środku jest większe niż w jednej czwartej długości belki, zarówno z lewej, jak i prawej strony.

Na fotografii przedstawiono miary opisowe: a) wartość oczekiwana; b) wariancję; c) skośność; d) kurtozę losowego ugięcia środkowej części belki mostowej z zamontowanym absorberem o parametrach $\mu = 0,05$, $\kappa = 1$ w zależności od prędkości obciążenia poruszającego się po belce oraz od położenia absorbera na długości belki. Zauważalny jest wyraźny wpływ sposobu zamontowania absorbera, szczególnie gdy pojazdy poruszają się z prędkością $v \in (80; 120)$ km/h, czyli największy zakres zmienności analizowanych miar jest w przedziale $v \in (0,6v_{cr}; 0,9v_{cr})$. Najmniejsze wartości wszystkich miar są przy prędkości do 80 km/h i niezależnie od położenia absorbera. Intuicyjnie jest to oczywiste – im mniejsza prędkość, tym bardziej „statyczna” praca konstrukcji – brak aktywacji absorbera. Analizując fotografie b i d, ustalono, że odpowiedzi belki z zamontowanym absorberem nie są symetryczne, co potwierdzają uzyskane wartości wariancji. Od strony wjazdu pojazdów na most wariancja jest mniejsza niż w połowie belki bliższej zjazdu z mostu. Wydaje się, że optymalne miejsce zainstalowania absorbera jest w przedziale długości belki w zakresie niesymetrycznym $x_A \in (0,4L_0; 0,6L_0)$. Kurtozą, jako miarę koncentracji wyników, wskazuje w analizowanym przypadku, że mamy do czynienia z „rozkładem płatokurtycznym”, czyli jest mniejsze prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzeń ekstremalnych w porównaniu z rozkładem normalnym. Mała wartość kurtozy sygnalizuje umiarkowany poziom ryzyka, ponieważ prawdopodobieństwo ekstremalnych ugięć jest małe. Wariancja jest również silnie powiązana ze smukłością rozkładu: im jest większa, tym rozkład bardziej spłaszczony, a im mniejsza, tym bardziej spiczasty.

Wnioski

Utrzymanie historycznych mostów wymaga stałej kontroli ich stanu technicznego oraz systematycznych prac remontowych. Naprawy są nieuniknione i niezbędne. Z uwagi na przestrzeganie zasad konserwatorskich remonty służą również ratowaniu zabytków, ale przede wszystkim pomagają przywrócić lub zachować użyteczność istniejących obiektów. Dzięki temu naprawy przywracają lub wydłużają oczekiwaną trwałość. [11]. Zużycie techniczne konstrukcji związane jest nie tylko z jej wiekiem, ale również m.in. z procesami starzenia elementów składowych, jakością wykonania, częstotliwością i jakością prac remontowych oraz zmieniającą się w czasie intensywnością obciążeń. W przypadku obciążeń mających charakter dynamiczny, aby zredukować drgania konstrukcji, inżynierowie starają się wspomagać historyczne konstrukcje m.in. za pomocą DVA lub TMD. Ważne jest, aby odpowiednio dobrać tłumik, ponieważ źle dobrane urządzenie może zwiększyć drgania, zamiast je redukować.

We wcześniejszych analizach stwierdzono, że przy optymalizacji absorbera należy wziąć pod uwagę wariancję ugięcia środka belki mostowej – im mniejsza wariancja, tym lepiej dostrójony absorber. W pracy [5] ustalono, że optymalne miejsce zainstalowania absorbera jest w przypadku $x_A \in (0,3L_0; 0,6L_0)$. Po dokładnej analizie miar zmienności zauważono, że odpowiedzi nie są symetryczne, tzn. od strony wjazdu pojazdów



Miary opisowe losowego ugięcia belki mostowej z zamontowanym absorberem o parametrach $\mu = 0,05$, $\kappa = 1$ w zależności od prędkości obciążenia poruszającego się po belce oraz od położenia absorbera na długości belki: a) wartość oczekiwana; b) wariancja; c) skośność; d) kurtoza
 Descriptive measures of the random deflection of the bridge beam with an absorber of the following parameters $\mu = 0,05$, $\kappa = 1$ depending on the speed of the load moving along the bridge and the position of the absorber along the length of the beam; a) expected value; b) variance; c) skewness; d) kurtosis

na most wszystkie miary zmienności są nieco mniejsze, szczególnie wariancja. Wydaje się zasadne przyjęcie tezy, że optymalne miejsce zainstalowania absorbera jest w przedziale długości belki $0,4L_0 - 0,6L_0$. Zauważono również, że prędkość krytyczna nie powoduje największych odchyłeń – najmniej korzystnie konstrukcja zachowuje się, gdy pojazdy poruszają się z prędkością $v \in (0,6v_{cr}; 0,9v_{cr})$.

Literatura

[1] Bień J. Typowe procesy degradacji i uszkodzenia żelbetowych obiektów mostowych. Przegląd Komunikacyjny. 2021. R. 76, nr 1, 6 – 15.
 [2] Jukowski M, Skulski B. Ocena właściwości dynamicznych kładki dla pieszych po zamontowaniu tłumików masowych. Materiały Budowlane. 2022; DOI: 10.15199/33.2022.04.15.
 [3] Lewandowski R. Problemy redukcji drgań konstrukcji budowlanych z wiskotycznymi i lepko-sprężystymi tłumikami drgań. Biuletyn WAT. 2012. Vol. LXI, Nr 4.

[4] Rystwej A, Śniady P. Dynamic response of an infinite beam and plate to a stochastic train of moving forces. Journal of Sound and Vibration. 2007. 299, 1033 – 1048.
 [5] Grosel J, Podworna M. Optimisation of absorber parameters in the case of stochastic vibrations in a bridge with a deck platform for servicing pipelines. Studia Geotechnica et Mechanica. 2021; <https://doi.org/10.2478/sgem-2021-0030>.
 [6] Śniady P. Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej; 2000.
 [7] Sobczyk K. Stochastyczne równania różniczkowe. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne; 1996.
 [8] Wolfram Mathematica 12. Wolfram Research © Copyright 1988-2021.
 [9] Sieniawska R, Śniady P, Żukowski S. Optimization of stochastic vibrations absorbers with respect to structure’s reliability. Structura Dynabics – EURO DYN 1996. ISBN 9054108134.
 [10] Den Hartog JP. Mechanical Vibrations, 4th ed. Doyer. New York. 1985.
 [11] Czarnecki L, Geryło R, Kuczyński K. Concrete Repair Durability. Materials. 2020. DOI: 10.3390/ma13204535.

Przyjęto do druku: 03.10.2022 r.