

mgr inż. Michał Piątkowski\*  
dr inż. Joanna Jankowska-Sandberg\*

# Analiza zwichrzenia sprężystego jedno- i dwuprzęsłowej kratownicy stalowej

## *Analysis of elastic lateral buckling of single and double-span steel trusses*

Znajomość zjawiska zwichrzenia sprężystego kratownic stalowych jest konieczna podczas procesu projektowania ustrojów kratowych. Utratę stateczności przy wyboczeniu z płaszczyzny ustroju kratowego (out-of-plane buckling), inicjowaną przez wyboczenie ściskanego pasa, określa się często jako zwichrzenie kratownicy. Istnieje bowiem duże podobieństwo między wybočeniami z płaszczyzny kratownicy a zwichrzeniem belki zginanej. Podstawowa norma dotycząca projektowania konstrukcji stalowych PN-EN 1993-1-1 *Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków* (Eurokod 3) zaleca przyjmowanie długości wyboczeń ściskanego pasa kratownicy jako odległości  $l$ , pomiędzy usztywnieniami poprzecznymi lub  $0,9l$ , w przypadku kratownicy z profili rurowych. Rzeczywista długość wyboczeń ściskanego pasa, jak opisano m.in. w pracach [1 ÷ 7], zależy od wielu czynników, takich jak:

- rodzaj i sztywność skratowania;
- sposób połączenia skratowania z pasami;
- rodzaj i miejsce przyłożenia obciążenia;
- sztywność pasów kratownicy;
- rozkład siły normalnej na długości pasa;
- liczba, sztywność oraz lokalizacja podpór poprzecznych.

Projektant może korzystać z praktycznych wskazówek dotyczących określania długości wyboczeń ściskanego pasa przy wyboczeniu z płaszczyzny kratownicy zawartych w Eurokodzie 3, ale powinien mieć na uwadze, że jest to podejście bardzo uproszczone, które nie uwzględnia wymienionych czynników.

W artykule przedstawiono wpływ sztywności skratowania na współczynnik długości wyboczeń ściskanego pasa przy wyboczeniu out-of-plane wybranej kratownicy jednoprzęsłowej. Wykazano, że zależność ta zachodzi również w przy-

padku kratownic dwu- i wieloprzęsłowych oraz że zmienna wartość siły normalnej w ściskanych pasach kratownicy ma istotny wpływ na wartość współczynnika długości wyboczeń ściskanego pasa  $\mu$  kratownic dwuprzęsłowych. Szczególnie interesujące wyniki otrzymano w przypadku analizy kratownic poddanych działaniu obciążenia unoszącego od ssania wiatru.

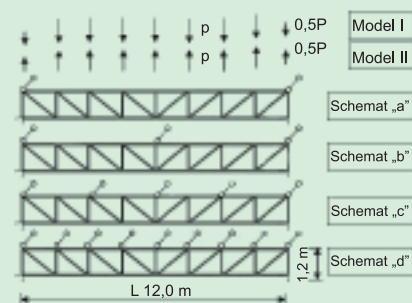
Prezentowane wyniki analiz numerycznych w postaci odpowiednich diagramów i tablic, zawierających wartości liczbowe długości wyboczeń ściskanego pasa dla różnych przypadków, uzupełniono rysunkami przedstawiającymi odpowiednie postacie zwichrzenia kratownic. Wyniki uzyskane na drodze numerycznej oraz przedstawione wnioski mają charakter poznawczo-praktyczny i mogą być przydatne w projektowaniu kratownic stalowych.

### Zakres analizy

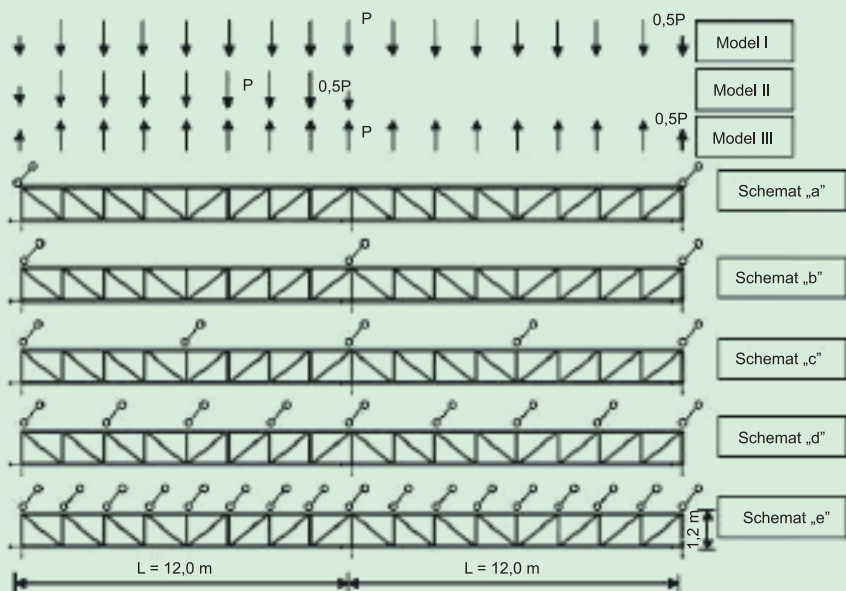
Do analizy numerycznej opisywanego zagadnienia przyjęto modele kratownic jedno- i dwuprzęsłowych o skratowaniu typu N oraz pasach równoległych (rysunki 1 i 2) o następującej charakterystyce:

- rozpiętość pojedynczego przęsła kratownicy  $L = 12,0$  m;
- wysokość kratownicy  $h = 1,2$  m;
- pasy kratownicy z rur kwadratowych RK 120 x 120 x 5;  $EA = 465\,350$  kN,  $GI_x = 6\,083\,520$  kN·cm<sup>2</sup>,  $EI_y = EI_z = 10\,458\,000$  kN·cm<sup>2</sup>;
- słupki i krzyżulce kratownic (z rur kwadratowych) o zmiennej sztywności. W przypadku kratownic jednoprzęsłowych uwzględniono trzy różne sztywności skratowania:

- RK 60 x 60 x 5:  $EA = 219\,350$  kN,  $GI_x = 665\,520$  kN·cm<sup>2</sup>,  $EI_y = EI_z = 1\,119\,300$  kN·cm<sup>2</sup>;



Rys. 2. Modele obciążeń oraz schematy kratownicy jednoprzęsłowej przyjęte do analizy



Rys. 1. Modele obciążeń oraz schematy kratownicy dwuprzęsłowej przyjęte do analizy

\* Politechnika Koszalińska, Wydział Inżynierii Lądowej, Środowiska i Geodezji, Katedra Konstrukcji Metalowych

– RK 80 x 80 x 5:  $EA = 301\,350\text{ kN}$ ,  $GI_x = 1\,687\,520\text{ kN}\cdot\text{cm}^2$ ,  $EI_y = EI_z = 2\,287\,000\text{ kN}\cdot\text{cm}^2$ ;

– RK 100 x 100 x 5:  $EA = 383\,350\text{ kN}$ ,  $GI_x = 3\,429\,520\text{ kN}\cdot\text{cm}^2$ ,  $EI_y = EI_z = 5\,859\,000\text{ kN}\cdot\text{cm}^2$ ;

a w przypadku kratownic dwuprzęsłowych – jedną sztywność skratowania:

– RK 80 x 80 x 5:  $EA = 301\,350\text{ kN}$ ,  $GI_x = 1\,687\,520\text{ kN}\cdot\text{cm}^2$ ,  $EI_y = EI_z = 1\,096\,000\text{ kN}\cdot\text{cm}^2$ .

W analizie uwzględniano sztywne oraz przegubowe połączenie skratowania z pasami oraz dodatkowe parametry, takie jak zmienna liczba stężeń bocznych oraz sposób przyłożenia i rodzaj obciążenia (rysunki 1 i 2). Kratownice jednoprzęsłowe analizowano przy dwóch wariantach obciążenia:

- obciążenie grawitacyjne śniegiem – symetryczne (Model I);

- obciążenie unoszące od działania wiatru (Model II)

oraz różnych rozstawach stężeń bocznych ściskanego pasa (schemat a, b, c, d), obrazujących różną wrażliwość pasa górnego na wyoboczenie z płaszczyzny układu. Kratownice dwuprzęsłowe analizowano przy trzech wariantach obciążenia:

- obciążenie grawitacyjne śniegiem – symetryczne (Model I);

- obciążenie grawitacyjne śniegiem – niesymetryczne (Model II);

- obciążenie unoszące od działania wiatru (Model III)

oraz pięciu schematach usztywnienia pasa górnego (schemat a, b, c, d, e).

Do wyznaczenia bifurkacyjnego obciążenia krytycznego  $P_{cr}$  dla poszczególnych wariantów kratownic oraz do wyznaczenia siły krytycznej  $N_{cr}$  w ściskanych pasach kratownic posłużono się programem komputerowym (Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2013) bazującym na Metodzie Elementów Skończonych. Otrzymane wartości mnożników obciążenia  $\lambda$  odpowiadające pierwszej postaci wyoboczenia ściskanego pasa przy wyoboczeniu z płaszczyzny kratownicy pozwoliły na wyznaczenie obciążenia krytycznego oraz siły krytycznej w pasie z zależności

$$P_{cr} = \lambda P, \quad N_{cr} = \lambda N_{max} \quad (1)$$

a następnie odpowiedniej długości wyoboczeniowej ściskanego pasa kratownicy ze znanego wzoru

$$L_{cr} = \mu l = \pi \sqrt{\frac{EI_z}{N_{cr}}} \quad (2)$$

gdzie:

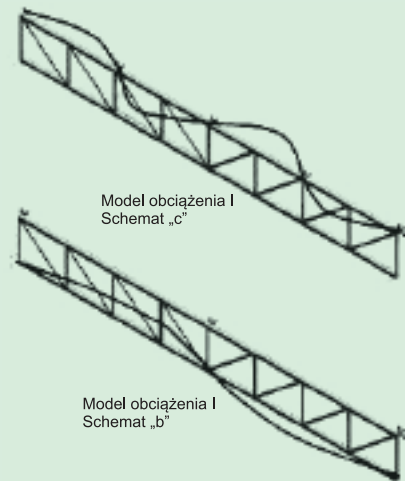
$\mu$  – współczynnik długości wyoboczeniowej;  
 $EI_z$  – sztywność giętna ściskanego pasa względem osi z;

$l$  – odległość pomiędzy stężeniami bocznymi ściskanego pasa górnego odpowiadająca poszczególnym schematom.

### Wyniki obliczeń numerycznych

Na rysunkach 3 i 4 przedstawiono zależność współczynnika długości wyoboczeniowej  $\mu$  ściskanego pasa w kratownicach jednoprzęsłowych od odpowiedniego schematu stężeń bocznych. Rysunek 3 dotyczy obciążenia grawitacyjnego (obciążenie śniegiem i ciężarem własnym) i wyoboczenia ściskanego pasa górnego, a rysunek 4 dotyczy obciążenia unoszącego od działania ssania wiatru oraz wyoboczenia ściskanego pasa dolnego. Umieszczono na nich także rozkłady sił normalnych w pasach. Na obu rysunkach widać wyraźnie wpływ sztywności skratowania oraz wpływ sposobu modelowania węzłów na wartość współczynnika  $\mu$ . Rysunek 5 przedstawia wybrane interesujące postacie wyoboczenia analizowanych kratownic.

Wzrost sztywności słupków i krzyżulców powoduje zmniejszenie długości wyoboczeniowej  $L_{cr}$  w każdym analizowanym schemacie. Można zauważyć, że zwłaszcza sztywne połączenie skratowania z pasami wpływa korzystnie na wyoboczenie pasa z płaszczyzny kratownicy. Dla wybranego schematu „a” (z węzłami sztywnymi) określono sztywność kratownicy na obrót z następującej zależności



Rys. 5. Przykładowe postacie wyoboczenia kratownic jednoprzęsłowych

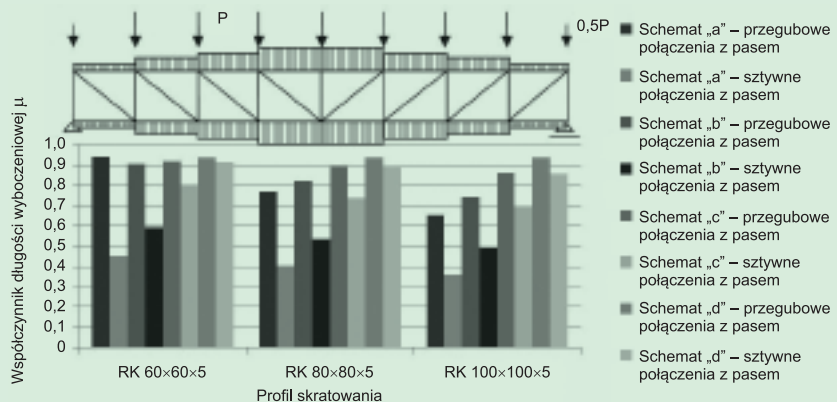
$$S_\phi = \frac{M}{\phi} \quad (3)$$

gdzie:

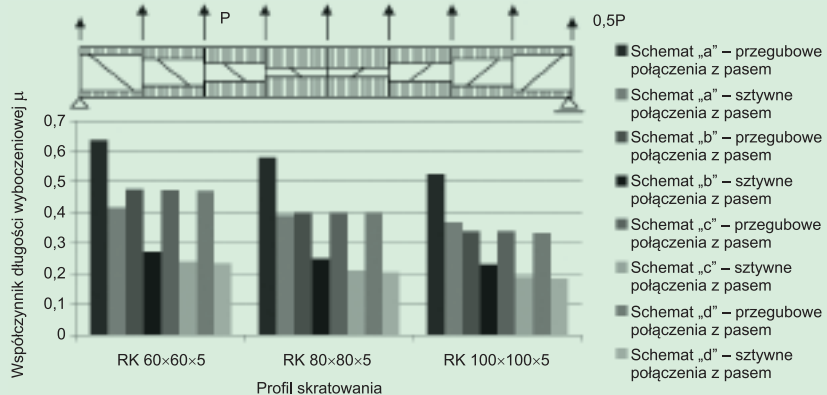
$M$  – moment zginający od pary sił jednostkowych przyłożonych w środku rozpiętości kratownicy;

$\phi$  – kąt obrotu przekroju kratownicy.

Na rysunku 6 przedstawiono interpretację graficzną dotyczącą sposobu określania sztywności kratownicy na obrót. Otrzymano następujące wartości  $S_\phi$ :



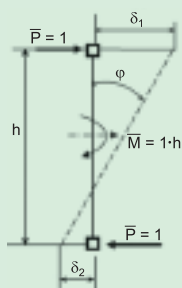
Rys. 3. Wartości współczynnika  $\mu$  ściskanego pasa kratownicy przy obciążeniu śniegiem



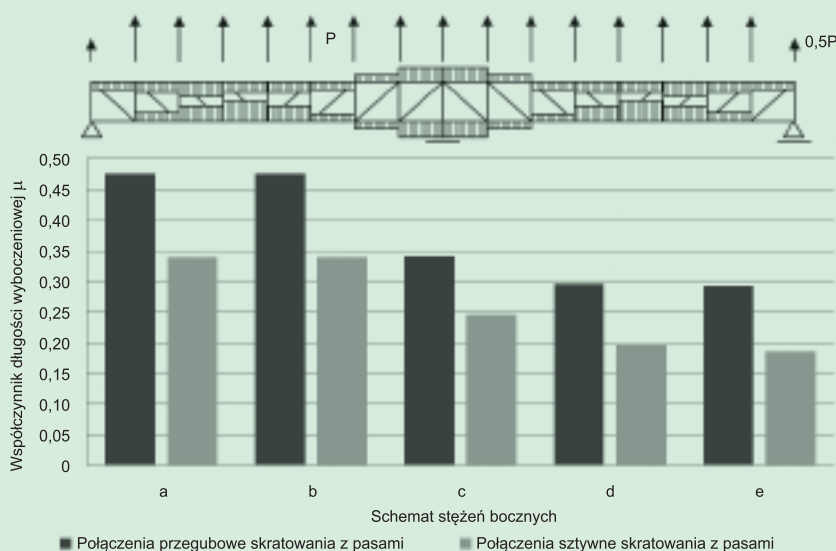
Rys. 4. Wartości współczynnika  $\mu$  ściskanego pasa kratownicy przy obciążeniu wiatrem

- dla wariantu 1 (60 x 60 x 5) –  $S_{\varphi} = 360,002 \text{ kNm/rad}$ ;
- dla wariantu 2 (80 x 80 x 5) –  $S_{\varphi} = 480,001 \text{ kNm/rad}$ ;
- dla wariantu 3 (100 x 100 x 5) –  $S_{\varphi} = 719,999 \text{ kNm/rad}$ .

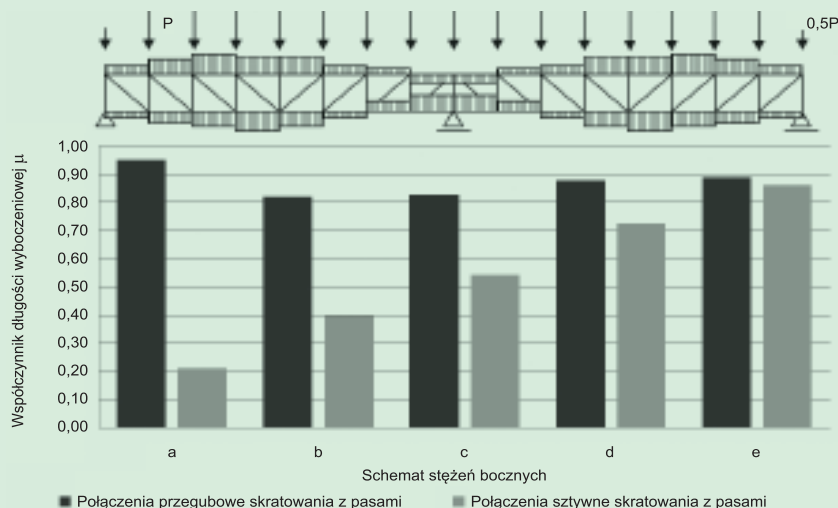
Wykonanie skratowania ze sztywniejszych profili prowadzi do wzrostu sztywności obrotowej przekroju kratownicy. Z rysunku 3 wynika, że wzrost sztywności kratownicy na obrót wpływa, co jest oczywiste, na wzrost obciążenia krytycznego kratownicy, a tym samym na zmniejszenie współczynnika długości wybozeniowej ściskanego pasa. Wyniki analizy kratownic dwuprzęsłowych przedstawiono na rysunkach 7, 8 i 9.



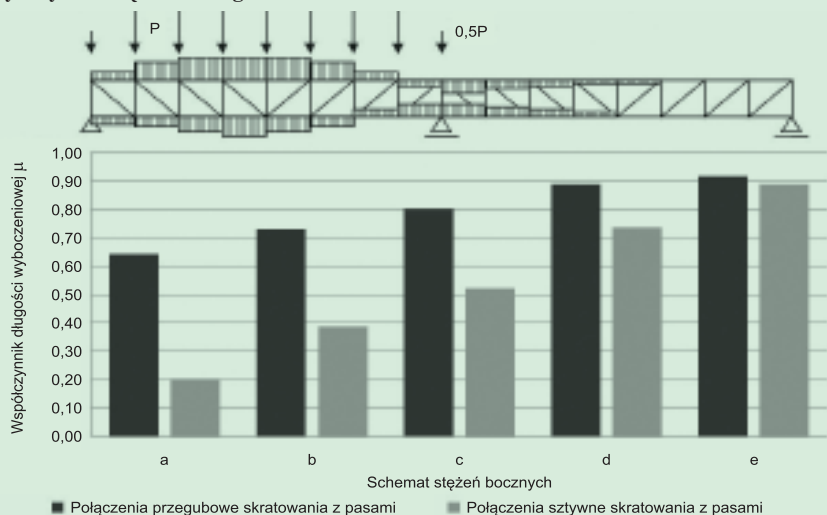
Rys. 6. Interpretacja graficzna określenia sztywności przekroju kratownicy na obrót



Rys. 9. Wartości współczynnika  $\mu$  ściskanego pasa kratownicy dwuprzęsłowej przy obciążeniu wiatrem



Rys. 7. Wartości współczynnika  $\mu$  ściskanego pasa kratownicy dwuprzęsłowej przy symetrycznym obciążeniu śniegiem



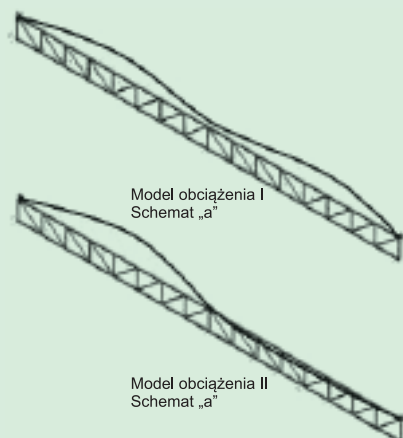
Rys. 8. Wartości współczynnika  $\mu$  ściskanego pasa kratownicy dwuprzęsłowej przy niesymetrycznym obciążeniu śniegiem

Zgodnie z rysunkiem 1 analizowano symetryczne i niesymetryczne obciążenie śniegiem oraz obciążenie wiatrem w pięciu konfiguracjach poprzecznych podpór (stężeń) pasa górnego. Ze względu na analogię do kratownic jednoprzęsłowych zdecydowano się na prezentację wyników tylko dla jednej, wybranej sztywności skratowania (RK 80 x 80 x 5). Sztywne połączenia skratowania z pasami są zdecydowanie korzystniejsze, zwłaszcza w przypadku małej liczby stężeń bocznych (schemat a, b i c). Z porównania schematów „a” w Modelu I obciążenia kratownic dwuprzęsłowych z wynikami kratownic jednoprzęsłowych wynika istotny wpływ rozkładu sił normalnych (częściowe rozciąganie pasa). Odpowiadająca tej sytuacji postać wybożenia została przedstawiona na rysunku 10. Podobne wartości współczynnika  $\mu$  dla połączeń sztywnych otrzymujemy w przypadku niesymetrycznego obciążenia śniegiem. W przypadku obu modeli obciążenia wpływ skratowania oraz modelowania węzłów maleje wraz ze wzrostem liczby stężeń bocznych.

Analiza kratownicy dwuprzęsłowej podanej działaniu obciążenia unoszącego wykazała, że współczynnik długości wybozeniowej pasa dolnego jest zdecydowanie mniejszy od wartości zalecanej w Eurokodzie 3. Ponadto współczynnik ten maleje wraz ze wzrostem liczby stężeń poprzecznych pasa górnego. W tabelach 1, 2 i 3 podano wartość współczynnika  $\mu$  ściskanego pasa oraz długości wybozeniowe pasów  $L_{cr}$  (w nawiasach), odpowiednio kratownicy jedno- i dwuprzęsłowych. Z analizy wynika,

że zwiększenie sztywności skratowania oraz sztywne połączenie skratowania z pasami znacznie wpływają na zmniejszenie długości wybozeniowej ściskanego pasa kratownicy. Zależność ta dotyczy zarówno kratownic jedno-, jak i dwuprzęsłowych.

Analiza obciążenia wiatrem wykazała, że długość wybozeniowa ściskanego



Rys. 10. Przykładowe postacie wybożenia kratownic dwuprzęsłowych

Tabela 1. Wartości współczynnika długości wybozeniowej pasa górnego kratownicy jednoprzęsłowej przy obciążeniu śniegiem (Model I rysunek 1)

Schemat kratownicy (rys.1)	Przegubowe połączenie skratowania z pasem			Sztywne połączenie skratowania z pasem		
	sztywność skratowania			sztywność skratowania		
	60 x 60 x 5	80 x 80 x 5	100 x 100 x 5	60 x 60 x 5	80 x 80 x 5	100 x 100 x 5
a	0,944	0,773	0,655	0,453	0,406	0,366
b	0,905	0,823	0,744	0,593	0,536	0,492
c	0,919	0,894	0,863	0,799	0,739	0,691
d	0,942	0,942	0,942	0,914	0,891	0,860

Tabela 2. Wartości współczynnika długości wybozeniowej pasa dolnego kratownicy jednoprzęsłowej przy obciążeniu wiatrem (Model II rysunek 1)

Schemat kratownicy (rys.1)	Przegubowe połączenie skratowania z pasem			Sztywne połączenie skratowania z pasem		
	sztywność skratowania			sztywność skratowania		
	60 x 60 x 5	80 x 80 x 5	100 x 100 x 5	60 x 60 x 5	80 x 80 x 5	100 x 100 x 5
a	0,638	0,580	0,527	0,416	0,391	0,369
b	0,477	0,400	0,339	0,273	0,250	0,230
c	0,475	0,399	0,338	0,240	0,212	0,190
d	0,473	0,397	0,335	0,234	0,206	0,184

Tabela 3. Wartości współczynnika  $\mu$  oraz długości wybozeniowe  $L_{cr}$  kratownicy dwuprzęsłowej

Schemat kratownicy dwuprzęsłowej (rys. 2)	Profil skratowania 80 x 80 x 5					
	obciążenie śniegiem symetryczne (Model I)		obciążenie śniegiem niesymetryczne (Model II)		obciążenie wiatrem (Model III)	
	przegubowe połączenia	sztywne połączenia	przegubowe połączenia	sztywne połączenia	przegubowe połączenia	sztywne połączenia
a (24,0 m)	0,950 (22,8)	0,212 (5,09)	0,640 (15,36)	0,200 (4,80)	0,476 (5,71)	0,340 (4,08)
b (12,0 m)	0,821 (9,85)	0,398 (4,78)	0,726 (8,71)	0,385 (4,62)	0,476 (5,71)	0,340 (4,08)
c (6,0 m)	0,828 (4,97)	0,543 (3,26)	0,798 (4,79)	0,521 (3,13)	0,341 (4,09)	0,246 (2,95)
d (3,0 m)	0,877 (2,63)	0,723 (2,17)	0,885 (2,66)	0,734 (2,20)	0,296 (3,55)	0,196 (2,35)
e (1,5 m)	0,889 (1,33)	0,860 (1,29)	0,915 (1,37)	0,885 (1,33)	0,292 (3,50)	0,185 (2,22)

(W nawiasach podano długość wybozeniową ściskanego pasa w metrach)

pasa kratownicy jest mniejsza niż zalecana przez Eurokod 3 odległość pomiędzy podporami pasa dolnego. Umieszczenie sztywnych podpór w pasie górnym działa stabilizująco na wybożenie pasa dolnego. Oddziaływanie to jest znaczne już przy pojedynczej podporze. Zagęszczanie podpór prowadzi do niewielkiego zmniejszenia długości wybozeniowej.

Zmiennoznakowy rozkład sił normalnych w kratownicach dwuprzęsłowych o sztywnym połączeniu skratowania z pasem powoduje znaczne zmniejszenie wartości współczynnika długości wybozeniowej, np. otrzymana z obliczeń długość wybozeniowa pasa w przypadku schematu „a” osiągnęła wartość 5,09 m, co przy zalecanej normowej długości 24,0 m wynosi tylko 21%.

### Podsumowanie

W artykule przedstawiono analizę zwichrzenia sprężystego kratownic dwuprzęsłowych w zależności od liczby podpór poprzecznych pasa górnego oraz rodzaju ob-

ciążenia. Nawiązano również do wyników analizy kratownic jednoprzęsłowych. Wykazano, że wpływ zmiennego rozkładu siły normalnej w pasach kratownicy dwuprzęsłowej jest duży. Zalecenie normowe dotyczące przyjmowania długości wybozeniowej ściskanego pasa kratownicy jako odległości między stężeniami poprzecznymi jest na ogół bezpieczne, chociaż nieekonomiczne. W związku z tym uważamy, że długość wybozeniowa ściskanego pasa kratownicy powinna być każdorazowo wyznaczana na podstawie indywidualnej analizy stateczności ustroju.

### Streszczenie

W artykule zawarto analizę numeryczną zwichrzenia sprężystego kratownic jedno- i dwuprzęsłowych. Określono wpływ sztywności skratowania i rodzaju przyłożonego obciążenia na długość wybozeniową ściskanych pasów kratownic. Wskazano również na istotne różnice między zwichrzeniem kratownic jedno- i dwuprzęsłowych.

**Słowa kluczowe:** kratownica, zwichrzenie sprężyste.

### Abstract

Numerical analysis of elastic lateral buckling of single and double-span trusses has been presented in the paper. The influence of the lacing stiffness and type of the applied load on the buckling length of compression chords of trusses have been determined. It also indicated the significant differences between lateral buckling of single and double-span trusses.

### Literatura

- [1] Jankowska-Sandberg J.: Wybrane zagadnienia stateczności dźwigarów łukowych i kratownic. Monografia, Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, Koszalin 2013.
- [2] Biegus A., Wojcyszyn D.: Coefficients of buckling length of chords for out-of-plane instability of small-bay trusses. Archives of Civil and Mechanical Engineering, vol. V (2005), 43 – 52.
- [3] Biegus A., Wojcyszyn D.: Studies on buckling lengths of chords for out-of-plane instability. Archives of Civil and Mechanical Engineering, vol. XI, no. 3 (2011), 507 – 517.
- [4] Iwicki P.: Stateczność przestrzenna płatwi kratowej obciążonej ssaniem wiatru. LIV Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 2008.
- [5] Iwicki P.: Wpływ uproszczonych schematów obliczeniowych na bezpieczeństwo konstrukcji dachu. Inżynieria i Budownictwo, nr 9/2006, 470 – 472.
- [6] Jankowska-Sandberg J., Pałkowski Sz.: Parametryczna analiza zwichrzenia sprężystego kratownic. XLVIII Konferencja Naukowa KILiW PAN i Komitetu Nauki PZITB, Krynica 2002, tom 2, 191 – 197.
- [7] Jankowska-Sandberg J., Kołodziej J.: Experimental study of steel truss lateral – torsional buckling. Engineering Structures 46 (2013), 165 – 172.